

Oktatási segédlet

*„Matematikai összefüggések és adatelemzési módszerek a földrajzban és a földtudományban”
című kurzushoz*

Pécs, 2021

A kurzus, illetve az oktatási segédlet az EFOP -3.4.3-16-2016-00005 azonosítószámú, „Korszerű egyetem a modern városban: Értékközpontúság, nyitottság és befogadó szemlélet egy 21. századi felsőoktatási modellben” Tanulásmódszertani, felzárkóztató jellegű, tanulástámogatási programok fejlesztése című projekt keretében valósult meg.

A kurzust tartotta és a jegyzetet összeállította: Schmeller Gabriella tudományos munkatárs

PTE TTK Földrajzi és Földtudományi Intézet

Pécs, 2021. június

Tartalomjegyzék

Bevezetés	5
A földrajz (geográfia)	5
Mértékegységek.....	6
1. példa: Celsius-skála és Fahrenheit-skála közötti átváltás.....	8
Prefixumok (előtagok).....	9
2. példa: mértékegységek közti átváltás	9
Százalékszámítás	10
3. példa: százalékszámítás	10
4. példa: százalékszámítás használata a földrajzban	11
Ezrelék számítása	11
5. példa: ezrelék használata a földrajzban	11
Egyenes- és fordított arányosság	12
Térképi méretarány	12
6. példa: térképi méretarány.....	13
Grafikus ábrázolás	13
1, Grafikus ábrázolás koordinátarendszerben	14
2, Grafikus ábrázolás koordinátarendszeren kívül:	23
A diagramok készítésének alapelvei.....	33
Általános matematikai műveletek, jelölések. Függvények. Trigonometria. Halmazok. Statisztikai alapok.	35
Alapműveletek.....	35
Műveletek törtekkel	36
Normálalak	37
7. példa: normálalak használata.....	37
Függvények	37
Függvénytípusok.....	38
Logaritmikus skálázás.....	46
Trigonometria	49
Hegyesszőgek szögfüggvényei	50
Pont helye a koordináta rendszerben.....	51
Vektorok.....	52
8. példa: bázisvektorok.....	54
9. példa: Descartes-féle koordináta rendszer és vektorok geográfiai alkalmazásai.....	58
Descartes-féle koordinátarendszer alkalmazási területei.....	58
Halmazok	63

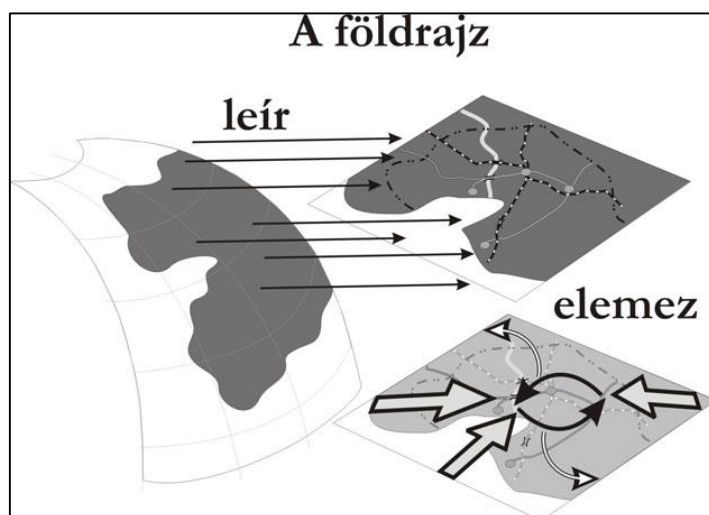
Statisztikai alapok.....	68
Mintavétel	68
1, Középértékek (átlagok)	69
2, Szóródási mérőszámok.....	70
3, Kvantilisek (osztópontok).....	72
4, Box plot	73
5, Osztályokba sorolt adatok	74
6, Abszolút változás	75
7, Relatív változás.....	75
8, Adatsorok általános jellemzésének paraméterei	75
9, Előnyök, hátrányok	76
10, Empirikus eloszlásfüggvény készítése	76
11, Empirikus sűrűségfüggvény készítése.....	77
12, Hisztogram intervallumainak száma és szélessége	79
10. példa – empirikus sűrűségfüggvény (talajtani alkalmazás)	79
13, Változók közötti kapcsolat	81
1, Korreláció	81
2, Regresszió számítás.....	82
11. példa – korrelációs kapcsolat	83
14, Mozgó átlag („moving average”).....	83
Feladatok- megoldással.....	86
Írjuk fel logaritmus segítségével!.....	86
Normálalak	87
Mértékegység átváltás.....	88
Alapműveletek, mértékegységek átváltása.....	88
Összetettebb feladatok	91
Képletbe helyettesítések	95
Számítási átlag, súlyozott számítási átlag.....	96
Trigonometria	100
Excelben megoldható ábrázolási, statisztikai feladatok	104
Források	123
Az ábrák forrásai	123
A táblázatok forrásai.....	134
A lábjegyzetek forrásai	134
További ajánlott irodalmak	140

Bevezetés

Jelen oktatási segédlet elsősorban azon földrajz-, illetve földtudomány szakos hallgatók számára készült, akik egyetemi tanulmányaik során már találkoztak alapvető matematikai összefüggésekkel. A jegyzet összegzését adja a kurzus során elhangzott és gyakorolt feladatoknak. Célja továbbá, hogy alapfokon rámutasson az említett tudományterületeken használható matematikai összefüggések gyakorlati hasznosíthatóságára. A jegyzet jelen formájában nem terjed ki a matematika minden területére, inkább gondolatébresztőként szolgál és a tanulmányok során támogatást kíván nyújtani.

A földrajz (geográfia)

A földrajz a „földrajzi teret, annak jelenségeit, kölcsönhatásait és törvényszerűségeit vizsgáló tudomány”.¹ Egyszerre társadalom- és természettudomány, ezért szokás úgy értelmezni, mint „egységes, de Janus-arcú tudomány”.² Megvizsgálja a térbeli kölcsönhatásokat (kölcsönhatásrendszer eleméz): (1) Vázolja a jelenség térbeli struktúráját (leíró jelleg); (2) feltárja a vizsgált jelenség kialakulásának lehetséges okait (összefüggések keresése); (3) elemzi, hogy milyen következményei vannak a jelenség létrejöttének (pl. világvárosok területi elhelyezkedése). A földrajz tehát „leírja a jelenségek térbeliségét és a térrel kialakított kölcsönhatásrendszerét”.³ (1. ábra)



1. ábra: A földrajzi vizsgálatok logikája
forrás: Trócsányi A., 2010

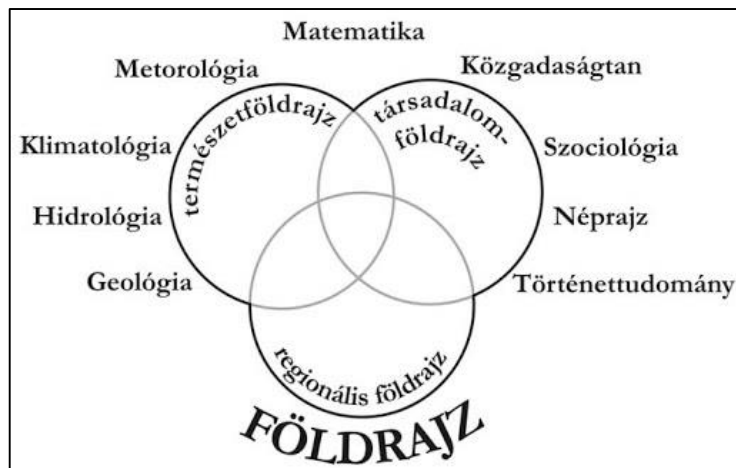
A földrajztudomány számos más tudomány ismereteit, összefüggéseit használja vizsgálatai során (pl. fizikai, kémiai, biológiai, geológiai eredményeket is). Ezen segédtudományok mentén kapcsolódik össze a természet- és társadalomföldrajz, illetve a regionális földrajz. Utóbbi tulajdonképpen az „általános szemléletmódú természet- és társadalomföldrajz konkrét térségekre vonatkozó alkalmazása”.⁴ (2. ábra) A matematika a földrajzban a (természet) folyamatainak, törvényszerűségeinek leírására alkalmas eszköz.

¹ forrás: <http://tamop412a.ttk.pte.hu/>

² forrás: <http://tamop412a.ttk.pte.hu/>

³ forrás: <http://tamop412a.ttk.pte.hu/>

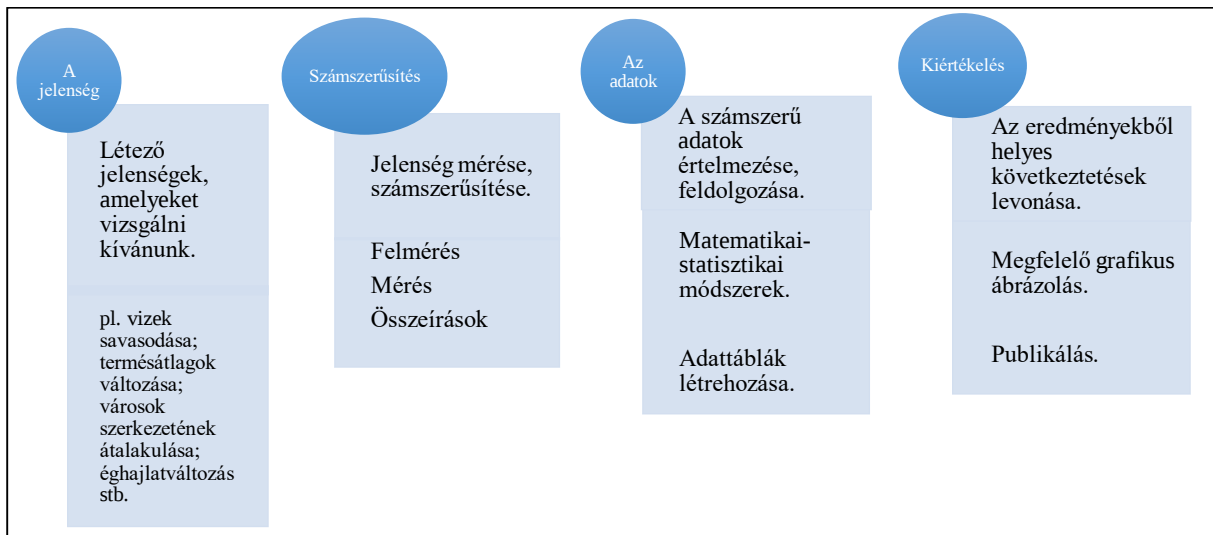
⁴ forrás: <http://tamop412a.ttk.pte.hu/>



2. ábra: A földrajztudomány és néhány fontosabb segédtudománya
forrás: <http://tamop412a.ttk.pte.hu/>

A földrajzi vizsgálatok lehetséges lépései: (1) felismerni a leírni kívánt jelenséget, (2) meghatározni a célt (mit akarunk kifejezni, mire keresünk választ), (3) módszert találni, (4) a módszert helyesen alkalmazni, (5) helyes következtetéseket levonni. (1. táblázat)

1. táblázat: Az adott jelenség leírásának, számszerűsítésének és elemzésének lehetséges lépései. forrás: saját szerkesztés



Mértékegységek

A földrajzi vizsgálatok során különböző adatokkal dolgozhatunk. Beszélhetünk abszolút mutatókról (amit mérünk, pl. hőmérséklet ($^{\circ}\text{C}$), egy terület nagysága (m^2), népesség száma (fő) stb.), illetve relatív mutatókról (csapadékkéntesség (mm/h), népsűrűség (fő/km^2), városlakók aránya (%) stb.). A mennyiségek csak a mértékegységükkel együtt értelmezhetők. Kiemelten fontos a mértékegységek

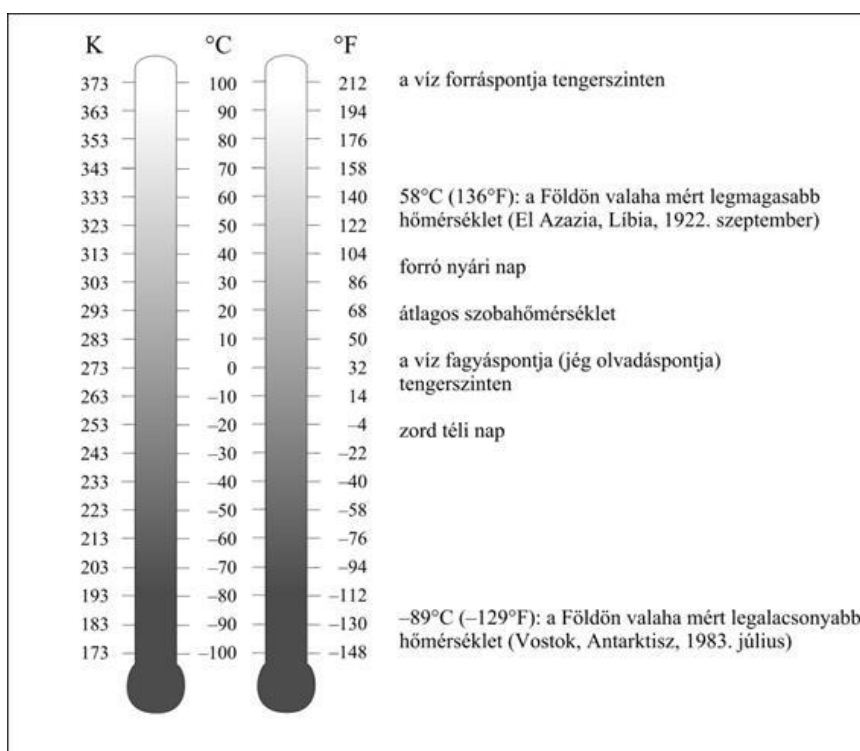
megfelelő használata, illetve az átváltás különböző mértékegységek között. A mennyiségek mindig egy mérőszámból, illetve a mértékegységből állnak össze (mennyiség = mérőszám·mértékegység). pl. 6 cm, 5 km² stb.

Példa - Hőmérsékleti mérőszámok

Az ún. Kelvin-skála nullpontját az abszolút nulla fok adja meg. Ezt a levegő részecskéinek teljes mozdulatlanságakor fellépő elméleti hőmérséklet jelöli ki.⁵

A Celsius-skálát Anders Celsius (1701-1744) definiálta 1742-ben. A Celsius- és a Kelvin-skála közötti kapcsolat: 0 °C = 273,16 K, illetve 100 °C = 373,16 K.⁶

A Fahrenheit-skálát Daniel Gabriel Fahrenheit (1686-1736) alkotta meg 1714-ben. A Fahrenheit- és a Celsius-skála közti átváltás: $^{\circ}\text{F} = \frac{9}{5} \cdot ^{\circ}\text{C} + 32$. A víz fagyáspontja 32 °F, forráspontja 212 °F.⁷



3. ábra: A Kelvin-, a Celsius- és a Fahrenheit-skála egymáshoz viszonyított értékei
forrás: www.tankonyvtar.hu

⁵ forrás: www.tankonyvtar.hu

⁶ forrás: www.tankonyvtar.hu

⁷ forrás: www.tankonyvtar.hu

1.példa: Celsius-skála és Fahrenheit-skála közötti átváltás

- Hány °C a 92 °F?

behelyettesítés az egyenletbe:

$$92 = \frac{9}{5} \cdot ^\circ C + 32$$

átrendezés:

$$92 - 32 = \frac{9}{5} \cdot ^\circ C$$

$$60 = \frac{9}{5} \cdot ^\circ C$$

$$^\circ C = \frac{60 \cdot 5}{9} = 33,3$$

Tehát 92°F 33,3°C-nak felel meg.

- 100 °C hány °F-nek felel meg?

behelyettesítés az egyenletbe:

$$^\circ F = \frac{9}{5} \cdot 100 + 32 = 212$$

Tehát 100°C 212 °F-nek felel meg.

- Mennyi a 100 °F Celsius-fokban kifejezve?
megoldás: 37,7 °C

Példák egyéb mértékegységekre:

- Csapadékmennyiség: annak a vízrétegnek a magasságával fejezzük ki, amely a teljesen sima, vízszintes felszínen állna a csapadékhullás után, ha abból semmi sem folyna, párologna, szivárogná el. 1 mm csapadék 1 m² felületen 1 liter víznek felel meg. [mm] ⁸
- Csapadék intenzitása: időegység alatt lehullott vízmennyiség. [mm/h] ⁹
- Abszolút vízgőztartalom: kifejezi, hogy 1 m³ levegőben hány g vízgőz található. [g/ m³] ¹⁰
- Relatív vízgőztartalom: megmutatja, hogy adott hőmérsékleten az adott vízgőztartalom hány %-a az ezen a hőmérsékleten befogadható vízgőztartalomnak. [%] ¹¹

⁸ forrás: www.tankonyvtar.hu

⁹ forrás: www.tankonyvtar.hu

¹⁰ forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

¹¹ forrás: www.met.hu

- Vízhozam (térfogatáram): Az adott keresztmetszeten időegység alatt átáramlott víz térfogata. $[m^3/s]$ ¹²
- Átlagos tengerszinti légnyomás:
 $1013,25 \text{ hPa} = 101\,325 \text{ Pa} = 10^5 \text{ bar}$
 $1 \text{ mbar} = 1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa}$
 $1 \text{ bar} = 100\,000 \text{ Pa} = 10^5 \text{ Pa}$

Extenzív és intenzív mennyiségek

- Extenzív: két test vagy rendszer kölcsönhatásakor összeadódnak („Összeadó mennyiségek”) ¹³

Pl. tömeg, térfogat, anyagmennyiség, energia

- Intenzív: a kölcsönhatások során kiegyenlítődésre törekszenek („Kiegyenlítő mennyiségek”) ¹⁴

Pl. nyomás, hőmérséklet

Prefixumok (előtagok)

kilo- $10^3 = 1000$

mega- $10^6 = 1\,000\,000$

giga- $10^9 = 1\,000\,000\,000$

tera- $10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$

peta- $10^{15} = 1\,000\,000\,000\,000\,000$

exa- $10^{18} = 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000$

1 ppmv = 1 térfogatrész az 1 milliónyi (10^6) térfogatban (1 molekula az 1 millió között)

1 ppbv = 1 térfogatrész az 1 milliárdnyi (10^{12}) térfogatban

1 pptv = 1 térfogatrész az 1 trilliónyi (10^{18}) térfogatban

2. példa: mértékegységek közti átváltás

1 gigatonna víz = 1 petagramm víz = 10^{15} g

1 g víz térfogata $1 \text{ cm}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$

tehát 1 gigatonna víz = $10^{15} \text{ g} \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{g} = 10^9 \text{ m}^3 = 1 \text{ km}^3$ víz

¹² forrás: www.docplayer.hu

¹³ forrás: www.tankonyvtar.hu

¹⁴ forrás: www.tankonyvtar.hu

Százalékszámítás

Százalékszámítás során két azonos mértékegységű mennyiség arányát vesszük, majd 100-zal szorozzuk. Ezzel az ún. százaléklábat számítjuk ki. Jele: %

A százalékláb mellett az alap, illetve a százaléérték is kiszámítható. Az alap jelenti azt az értékünket, amelynek valahány százalékát ki szeretnénk számolni. A százaléérték az alap százalékláb szerint meghatározott hányada. A százalékláb tulajdonképpen a százaléérték és az alap aránya.

A százaléérték, az alap, illetve a százalékláb kifejezhető a következőképpen:

$$\text{százaléérték} = \text{alap} \cdot \frac{\text{százalékláb}}{100}$$

$$\text{alap} = \frac{\text{százaléérték}}{\frac{\text{százalékláb}}{100}}$$

$$\text{százalékláb} = \frac{\text{százaléérték}}{\text{alap} \cdot 100}$$

3. példa: százalékszámítás

a) Mennyi 150 g-nak a 42%-a?

megoldás:

$$\text{alap} = 150 \text{ g}$$

$$\text{százalékláb} = 42 (\%)$$

$$\text{százaléérték} = 150 \cdot \frac{42}{100} = 150 \cdot 0,42 = 63$$

Tehát 150 g 42 %-a 63 g.

b) Melyik számnak a 26%-a a 120?

megoldás:

$$\text{alap} = ?$$

$$\text{százalékláb} = 26$$

$$\text{százaléérték} = 120$$

$$\text{alap} = \frac{\text{százaléérték}}{\frac{\text{százalékláb}}{100}} = \frac{120}{\left(\frac{26}{100}\right)} = 120 : 0,26 = 461,54$$

Tehát 461,5 az a szám, amelynek 26%-a a 120.

4. példa: százalékszámítás használata a földrajzban

15, 16

$$1. \text{ Egy térség részesedése a GDP-ből (\%)} = \frac{\text{térség GDP-je}}{\text{ország GDP-je}} \cdot 100$$

$$2. \text{ Városi népesség aránya (\%)} = \frac{\text{városi népesség}}{\text{teljes népesség}} \cdot 100$$

$$3. \text{ Munkanélküliségi ráta (\%)} = \frac{\text{munkanélküliek száma}}{\text{aktív népesség}} \cdot 100$$

4. A **százalékpontot** akkor használjuk, ha a %-ok változását fejezzük ki.

pl. a városi népesség aránya 40 év alatt 20 százalékponttal nőtt:

	1950	1990
Városi népesség aránya (%)	40	60

Ezrelék számítása

Az ezrelék, a százalékhoz hasonlóan, két azonos mértékegységű mennyiség arányát fejezi ki, 1000-rel szorozva. Jele: ‰

pl. csatornák vízállása: 1 ‰ lejtés 1000 m távolságban 1 m szintkülönbséget jelent, tehát:

$$\frac{1}{1000} \cdot 1000 = 1 \text{ ‰}$$

5. példa: ezrelék használata a földrajzban

17, 18

Születési ráta – 1000 lakosra jutó születések száma

Csecsemőhalandósági ráta:

$$\frac{\text{1 évesnél fiatalabb korban meghaltak adott évi száma}}{\text{élveszületettek száma az adott évben}} \cdot 1000$$

Maszkulin arány – 1000 nőre jutó férfiak száma:

$$\frac{\text{férfiak száma}}{\text{nők száma}} \cdot 1000$$

¹⁵ forrás: Telbisz et al., 2013

¹⁶ forrás: www.jgypk.hu

¹⁷ forrás: www.demografia.hu

¹⁸ forrás: www.demografia.hu

Egyenes- és fordított arányosság

- Két mennyiség **egyenesen arányos**: Ha a két változó mennyiség összetartozó értékeinek az aránya állandó.¹⁹
- A két egyenlő arány összekapcsolása: aránypár.

pl. Ha egy termék 1 métere 250 Ft-ba kerül, akkor 20 méter ugyanebből a termékből $20 \cdot 250 = 5000$ Ft

- Két mennyiség **fordítottan arányos**: Ha a két változó mennyiség összetartozó értékeinek szorzata állandó.²⁰

pl. Minél nagyobb egy terület, annál kisebb a népsűrűség (ugyanakkora népességszám esetén)

Térképi méretarány

A méretarány egy tört szám (a rajzon lévő méret és a valóságnak megfelelő tényleges méret aránya), amely megmutatja, hogy ami a térképen 1 cm, az a valóságban hány cm-nek felel meg.²¹ Az aránymérték a térkép szélén elhelyezett vonalzó.

A térképek különböző méretarányúak lehetnek, amelyeket méretarányuktól függően különböző célokra használnak. Beszélhetünk nagy méretarányú (nagyon részletes, pl. 1:10 000), közepes méretarányú (kevésbé részletes, pl. 1:100 000), vagy kis méretarányú (kis részletességű 1:1 000 000) térképekről.²² Minél nagyobb egy térkép méretaránya, annál részletesebb.



4. ábra: A térkép méretaránya és vonalas aránymértéke
forrás: www.nkp.hu

¹⁹ forrás: www.mathreference.org

²⁰ forrás: www.mathreference.org

²¹ forrás: www.tankonyvtar.hu

²² forrás: www.lazarus.elte.hu

6. példa: térképi méretarány

Ha Bécs Budapesttől 1 cm-re fekszik légvonalban az Atlasz 1:25 000 000 méretarányú *Európa domborzata* térképén, akkor mekkora a két város távolsága az 1:100 000 000 méretarányú Föld országai térképén?

megoldás:

1:25 000 000 méretarányú térkép esetén: ha a távolság a térképen 1 cm, akkor a valóságban $1 \cdot 25\,000\,000 \text{ cm} = 250 \text{ km}$

Ha a valóságban 250 km-re (25 000 000 cm-re) helyezkednek el egymástól, akkor ez egy 1:100 000 000 arányú térképen aránypárral számolva:

$$1 \rightarrow 100\,000\,000$$

$$x \rightarrow 25\,000\,000$$

$$x = 25\,000\,000 / 100\,000\,000 = 0,25$$

Tehát az 1:100 000 000 méretarányú Föld országai térképén 0,25 cm-re helyezkednek el egymástól.

Grafikus ábrázolás

Az adatok kiértékelésének fontos lépése a grafikus megjelenítés. Adattípustól függően különböző grafikus ábrázolási módszereket használhatunk, amelyek közül a megfelelő megválasztása kulcskérdés. A grafikus ábrázolás során elengedhetetlenül fontos továbbá az adatok helyes ábrázolása. Az ábrázolás bármilyen jellegű, előnyére vagy hátrányára történő szándékos alakítását kerülni kell.

A grafikus ábrázolásának előnyei: ²⁴

- elősegíti az adattömegek, statisztikai sorok és adattáblák áttekintését, értelmezését;
- kihangsúlyozza a jelenségek közötti mennyiségi különbségeket, rámutat a belső összefüggésekre, kapcsolatokra, ezek változásaira, fejlődésére és ütemére;
- nem abszolút méreteket, hanem arányokat érzékeltet;
- az arányok érzékeltetése távolságok, területek és térfogatok segítségével történik.

A grafikus ábrázolás legalapvetőbb eszköze a diagram, amely „kölcsonös összefüggéseket szemléltető ábra, grafikon”. ²⁵

²³ forrás: www.nkp.hu

²⁴ forrás: Abonyiné, 1999.

²⁵ forrás: www.idegen-szavak.hu

A grafikus ábrázolás fő csoportjai: ²⁶

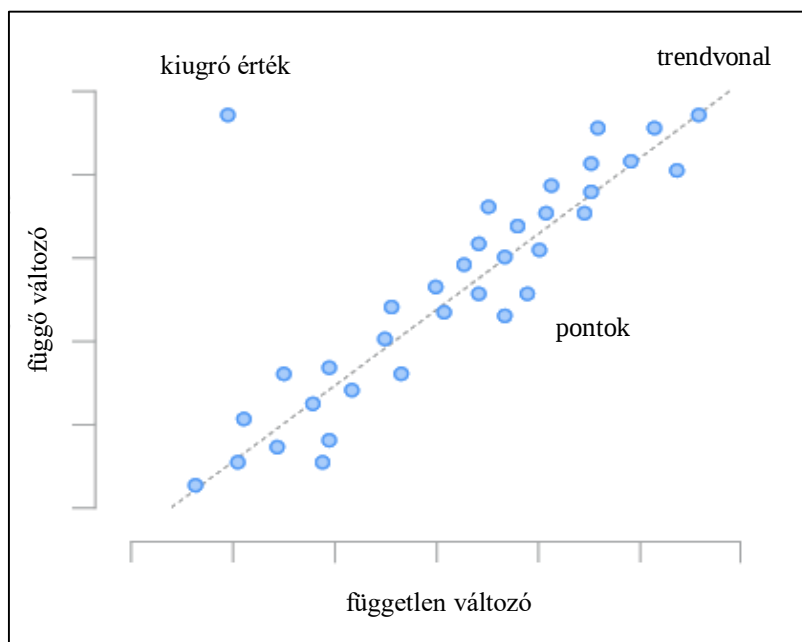
- koordinátarendszerben való ábrázolás
- koordinátarendszer nélküli ábrázolás

Fő típusok: ²⁷

- Grafikon, diagram
 - Vonaldiagram
 - Pontdiagram
 - Oszlop- és szalagdiagram
 - Sztereogram
 - Kartogram, kartodiagram
 - Piktogram

1, Grafikus ábrázolás koordinátarendszerben

- Elsősorban: Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer (ill. poláris koordinátarendszer)
- Pontdiagram: az x tengelyen a független, az y tengelyen a függő változó szerepel. Általában korrelációs kapcsolat ábrázolására célszerű használni.

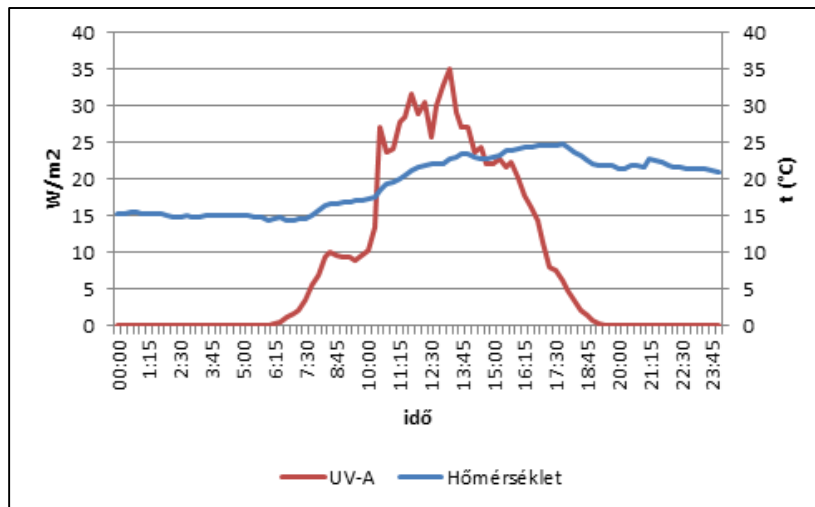


5. ábra: Pontdiagram lineáris trendvonallal
forrás: www.learnbyexample.org, a magyar feliratok: saját szerkesztés

²⁶ forrás: Abonyiné, 1999

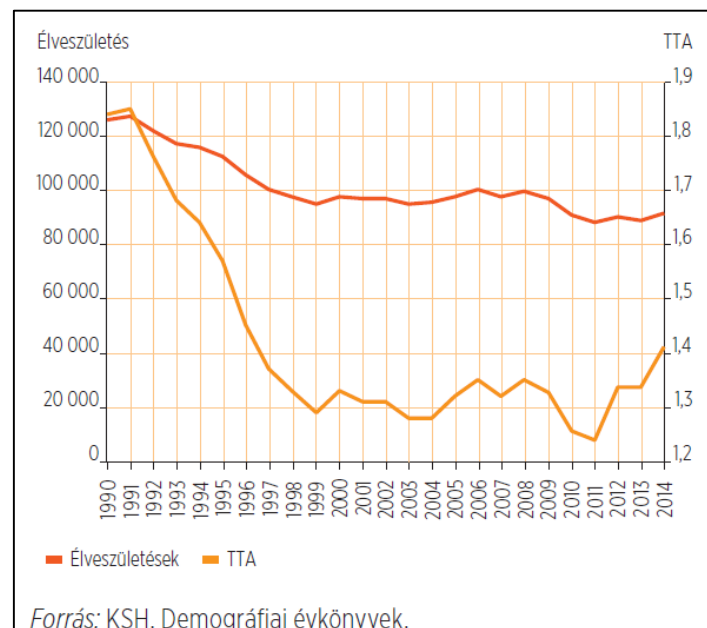
²⁷ forrás: Abonyiné, 1999

- Vonaldiagram: a pontdiagram pontjainak egyenes vagy görbe vonallal való összekötésével kapjuk. Használatos gyakorisági és idősorok ábrázolásakor, illetve ha egyszerre több jelenség változását vizsgáljuk.



6. ábra: AZ UV-A (pirossal, bal oldali tengelyen) és a hőmérséklet (kékkel, jobb oldali tengelyen) menete egy nap során

forrás: www.tankonyvtar.hu



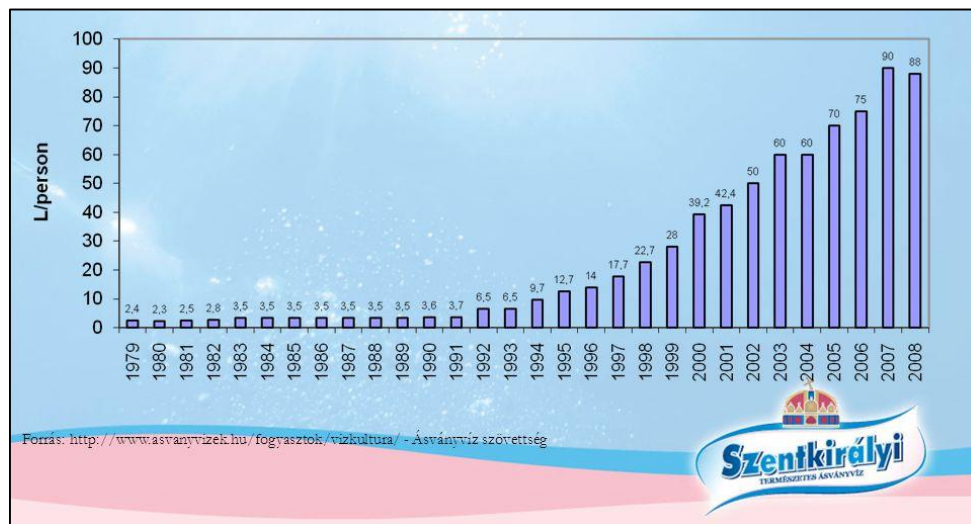
7. ábra: Az élveszületések száma és a teljes termékenységi arányszám Magyarországon, 1990-2014

forrás: www.otpbank.hu

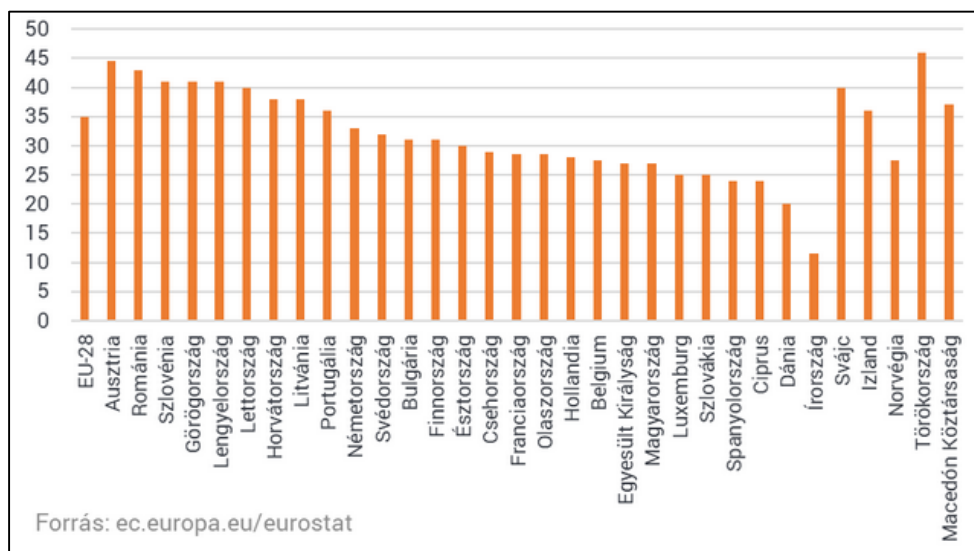
- Oszlopdiaagram:
 - Célszerű állapot idősor vagy nem folyamatos tartamú idősor ábrázolására használni. A téglalapok hossza, ill. területe a gyakorisággal arányos. (8. ábra)
 - Az ábrázolt adat lehet pl. egy városra, országra stb. vonatkozó adat is (9. ábra). Ekkor az oszlopok felcserélésével változik az oszlopdiaagram alakja. Ezért ilyen nem

számszerűsíthető változók esetén (pl. ország) az adatpontok összekötése folyamatos vonallal nem javasolt.

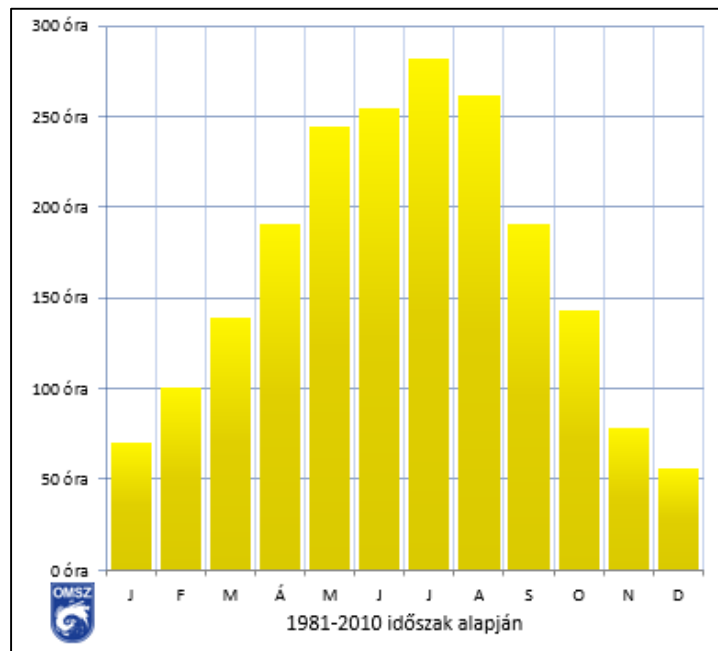
- Halmozott (12. ábra) vagy összevont oszlopdiagram – csak abszolút mutatóknál
- Térbeli oszlopok használata – kevésbé praktikus
- Fontos: megfelelő színezés, jelmagyarázat (különböző adatsorok egyidejű ábrázolása esetén)



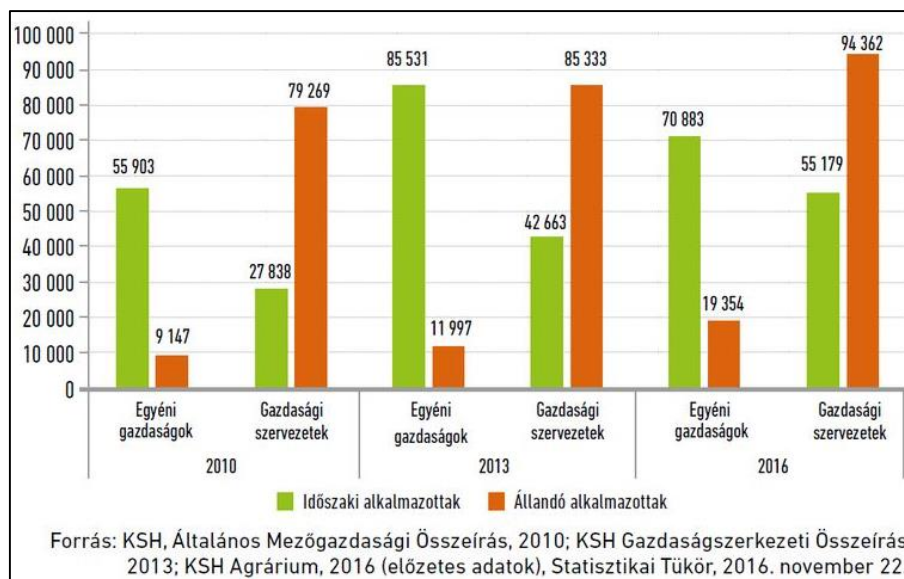
8. ábra: Az ásványvízfogyasztás alakulása Magyarországon (1979-2008)
forrás: www.asvanyvizek.hu



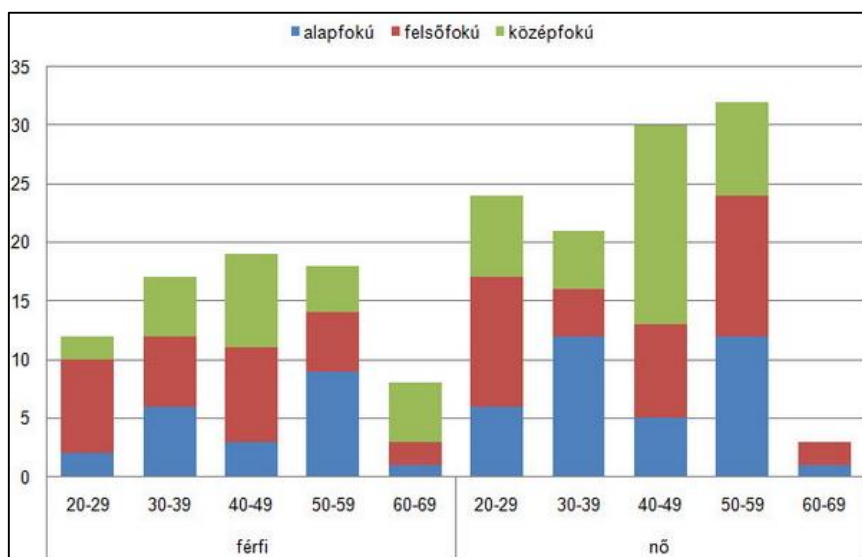
9. ábra: A nők aránya az európai mezőgazdaságban (%), 2016
forrás: www.agrarszektor.hu



10. ábra: A napfénytartam átlagos havi összegei (Budapest), az 1981-2010 időszak alapján
forrás: www.met.hu

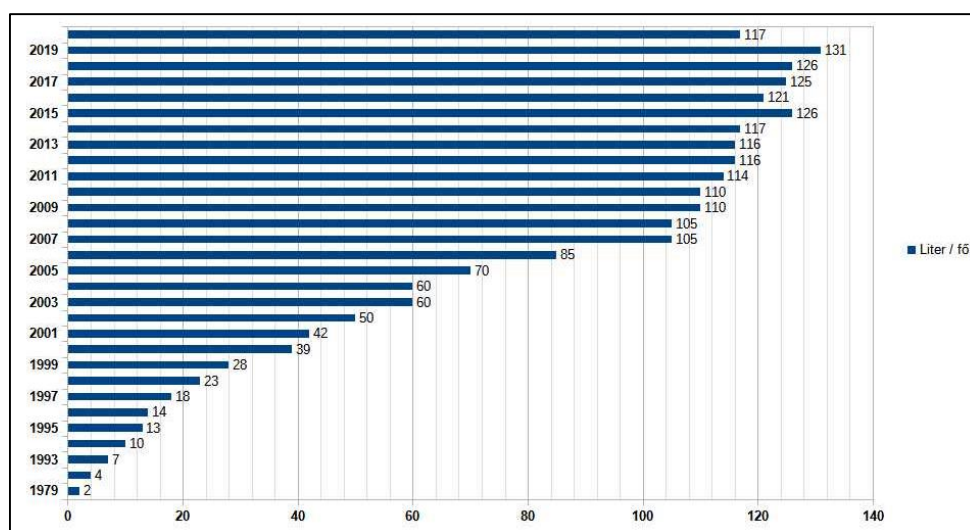


11. ábra: Az időszaki és állandó alkalmazottak száma a gazdálkodási forma szerint (2010-2016)
forrás: www.agronaplo.hu



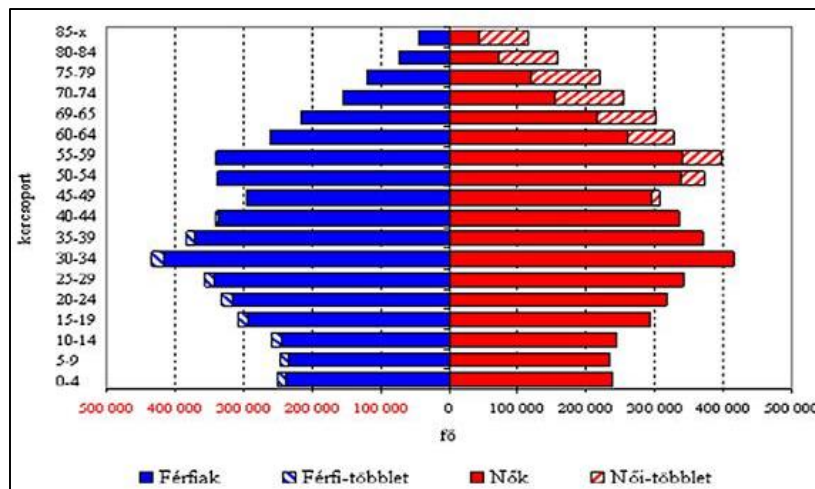
12. ábra: A nem, a végzettség és a korcsoport szerinti megoszlás
forrás: www.tankonyvtar.hu

- Szalagdiagram: az oszlopdiagram x és y tengelyének felcserélésével kapjuk



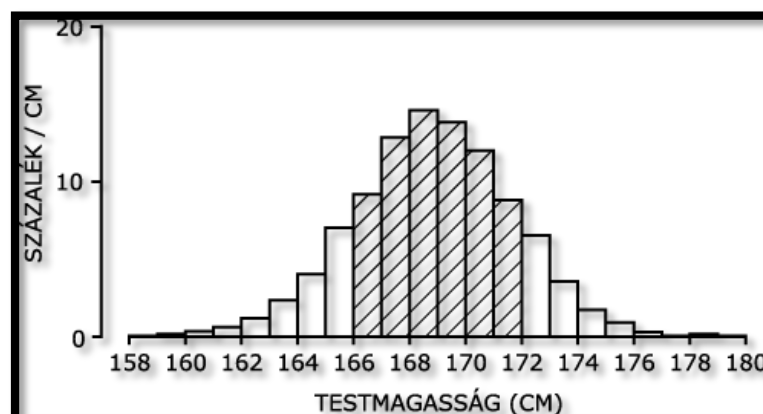
13. ábra: Ásványvíz fogyasztás alakulása Magyarországon 1979-2020
forrás: www.asvanyvizek.hu

- Speciális szalagdiagram: korfa



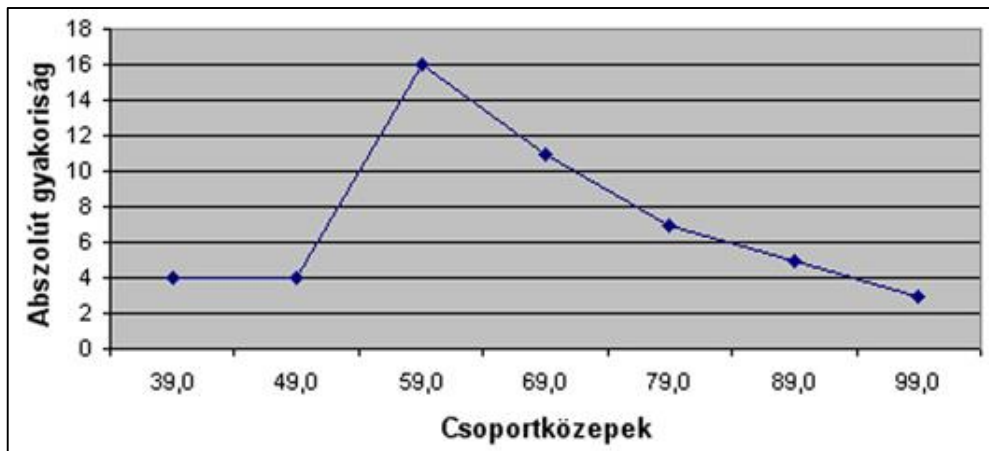
14. ábra: Korfa, Magyarország, 2011
forrás: www.tankonyvtar.hu

- Hisztogram: olyan grafikon, amelynek gyakoriságot ábrázoló téglalapjai hézag nélkül illeszkednek egymáshoz. Jól érzékelteti az egyes osztályközökhöz tartozó relatív gyakoriságot.
 - Gyakoriság hisztogram: az y tengelyen az adott intervallumba eső darabszám (n) szerepel. A darabszámokat összeadva megkapjuk a teljes elemszámot.
 - Relatív gyakoriság hisztogram: adott intervallumba eső darabszám/teljes elemszám (k/n). Ezzel tulajdonképpen megkapjuk az adott intervallumba esés valószínűségét (egyenlő intervallumszélességek esetén). Az oszlopok területe arányos a relatív gyakorisággal. A relatív gyakoriságok értékeit összeadva 1-et kapunk.
 - Empirikus sűrűségfüggvény: Eltérő intervallumszélességek esetén egységnyi intervallumszélességre eső gyakoriságot kell ábrázolni ($\frac{k_i}{n \cdot d_i}$). A képletben a k_i az i-edik intervallumba eső darabszámot, az n az összes elemszámot, d_i pedig az i-edik intervallum szélességét jelenti.



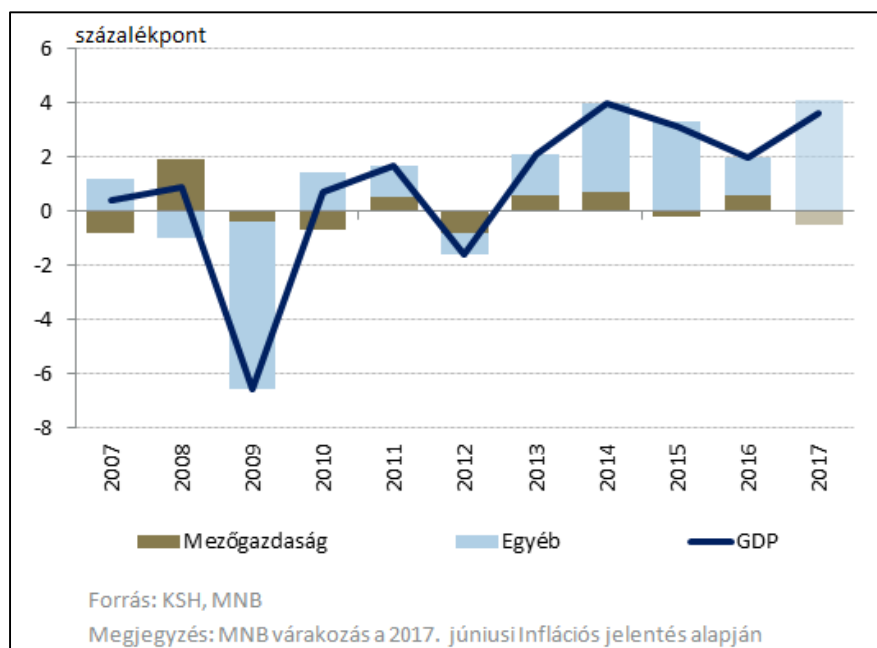
15. ábra: Relatív gyakoriság hisztogram
forrás: www.tankonyvtar.hu

- Gyakorisági poligon: olyan speciális vonaldiagram, amely folytonos ismerv esetén gyakorisági sort ábrázol (elég nagy adatmennyiség esetén kisimul, gyakorisági görbét kapunk). Csoportosított adatokat ábrázol, a csoportközépeket tartalmazza feliratokként.

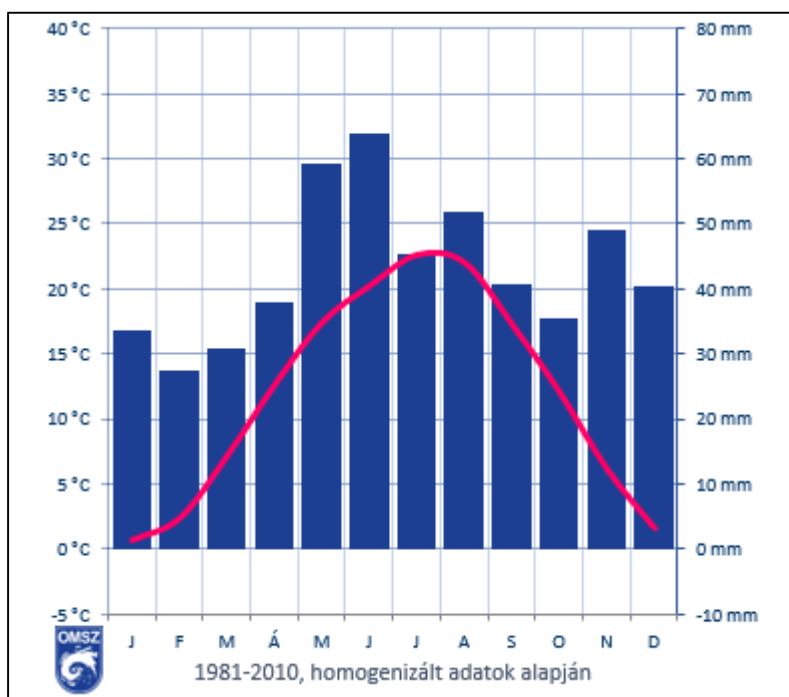


16. ábra: Gyakorisági poligon
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

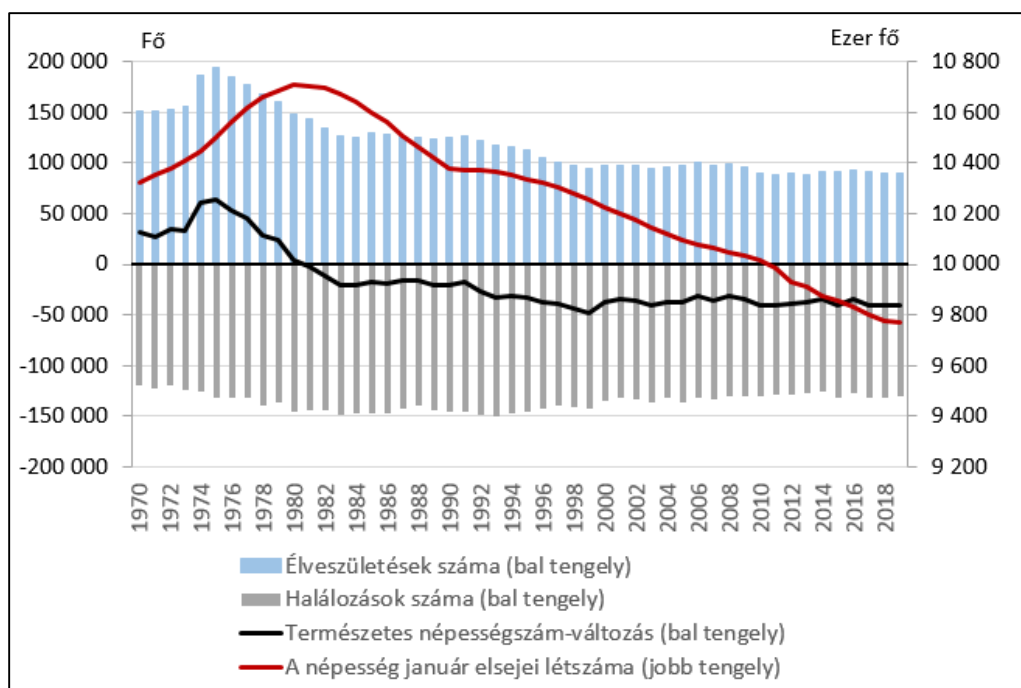
- Kombinált diagramtípusok



17. ábra: A mezőgazdaság és egyéb ágazatok hozzájárulása a GDP-növekedéshez (százalékpontban). Vonal- és oszlopdiagram
forrás: www.portfolio.hu



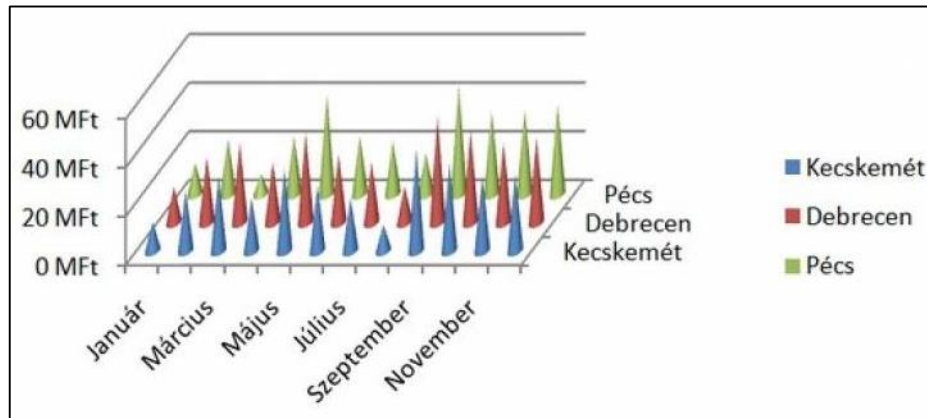
18. ábra: Átlagos havi középhőmérsékletek (vonaldiagram, pirossal) és csapadékösszegek (oszlopdiagram)
forrás: www.met.hu



19. ábra: Az elveszületések és a halálozások száma (oszlopdiagramok), illetve a természetes népességszám-változás és a népesség január elsejei létszáma (vonaldiagram)
forrás: www.infostart.hu

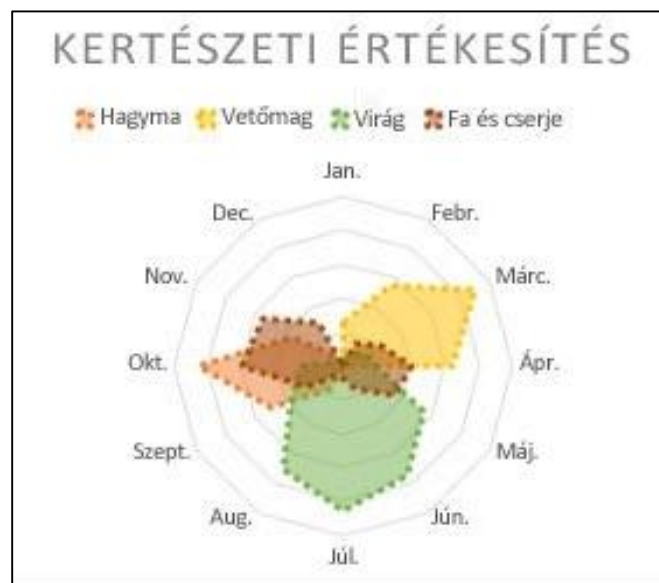
- Sztereogram: geometriai testekkel (gömb, kocka, gúla, hasáb), azok térfogatával szemlélteti a sokaságot. A 20. ábra egy kúpdiagramos ábrázolást mutat be, amelyen jól látszik az ábrázolás

hátránya (nehezen értelmezhető az adatsorok közti különbség, illetve az egyes kúpmagasságokhoz tartozó értékek).

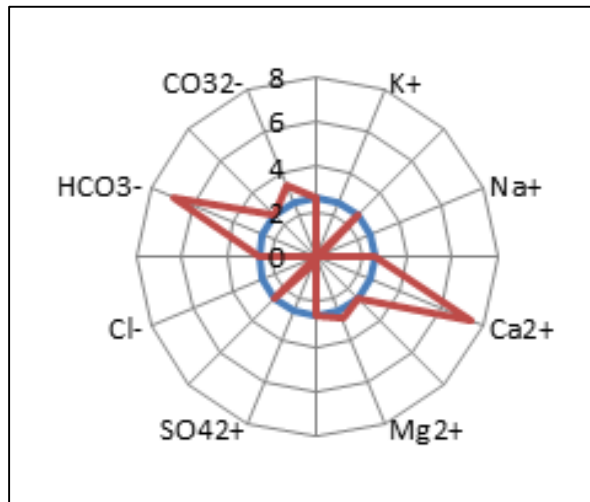


20. ábra: Kúpdiaagram
forrás: www.pcworld.hu

- Sugárdiagram (poláris koordináarendszer alkalmazása) általánosan:
 - beosztás a jobb oldali vízszintes sugáron;
 - egyik koordináta a vízszintes tengelyen a középponttól mért távolság;
 - másik koordináta a jobb oldali vízszintes sugárral bezárt szög nagysága (radiánban).



21. ábra: Sugárdiagram - az értékesített kertészeti termékek havi megoszlása
forrás: www.microsoft.com



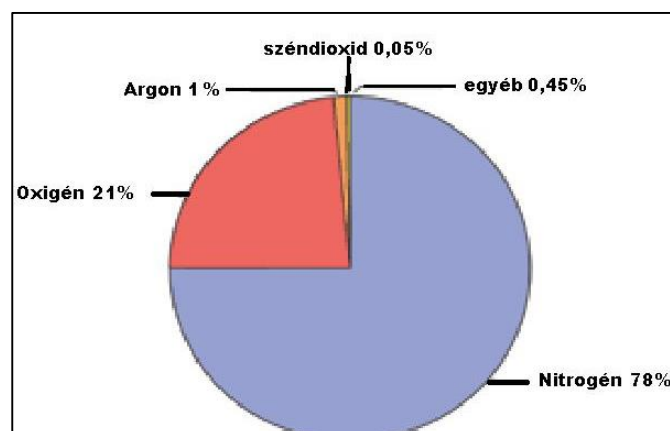
22. ábra: Sugárdiagram - az egyes ionok megoszlása egy mintában
forrás: www.tankonyvtar.hu

2, Grafikus ábrázolás koordinátarendszeren kívül:

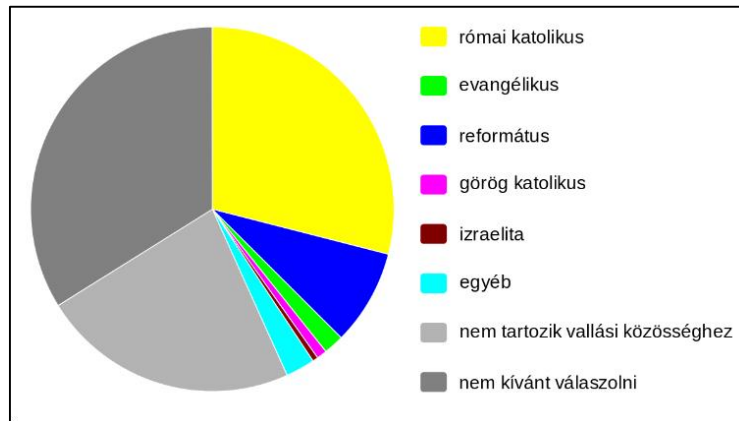
- leggyakoribb formája: területtel való ábrázolás;
- legelterjedtebb: kör, gyakoriak még: négyzet, téglalap, háromszög;
- szerkesztésnél ügyelni kell rá, hogy az ábrázolandó adatok aránya valóban a területek arányával egyezzen meg.

Kördiagram:

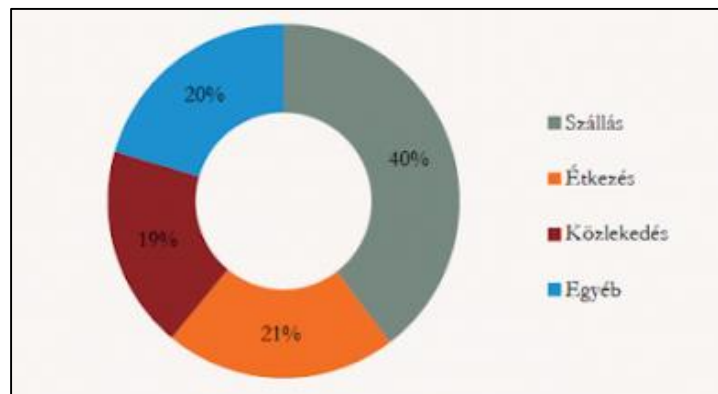
- egy adatsorban a megoszlási viszonyszám ábrázolására alkalmas;
- csak abszolút mutatóknál használatos;
- nem ajánlott a 3D (26. ábra) és a robbantott kör (27. ábra) használata. A 3D ábrázolás torzítja az egyes körcikkek részesedési arányát (a közelebbit nagyobbobnak érzékeljük).



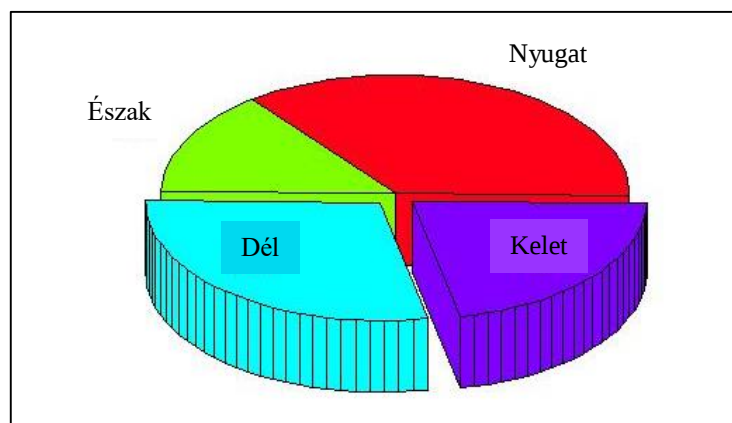
23. ábra: A száraz levegő %-os összetétele kördiagramon
forrás: www.docplayer.hu



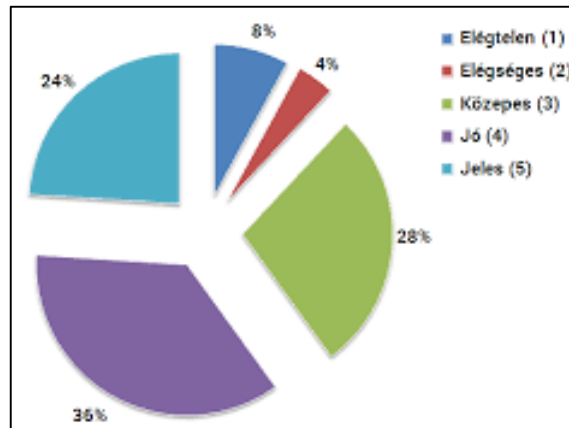
24. ábra: Budapest lakóinak vallási összetétele 2011-ben
forrás: www.commonswikimedia.org



25. ábra: Költsésszerkezet a többnapos belföldi utakon 2015-ben
forrás: www.turizmusonline.hu



26. ábra: A szélirány megoszlása egy vizsgálati területen (3D ábrázolás)
forrás: www.docplayer.hu



27. ábra: Osztályzatok %-os megoszlása. Robbantott kördiagram
forrás: www.zanza.tv

Kartogramok, kartodiagramok:

- térképen alapuló ábrázolás;
- megkönnyítik a statisztikai adatok területi, helyzeti összehasonlítását;
- színek vagy árnyékolás segítségével történő ábrázolást használnak.

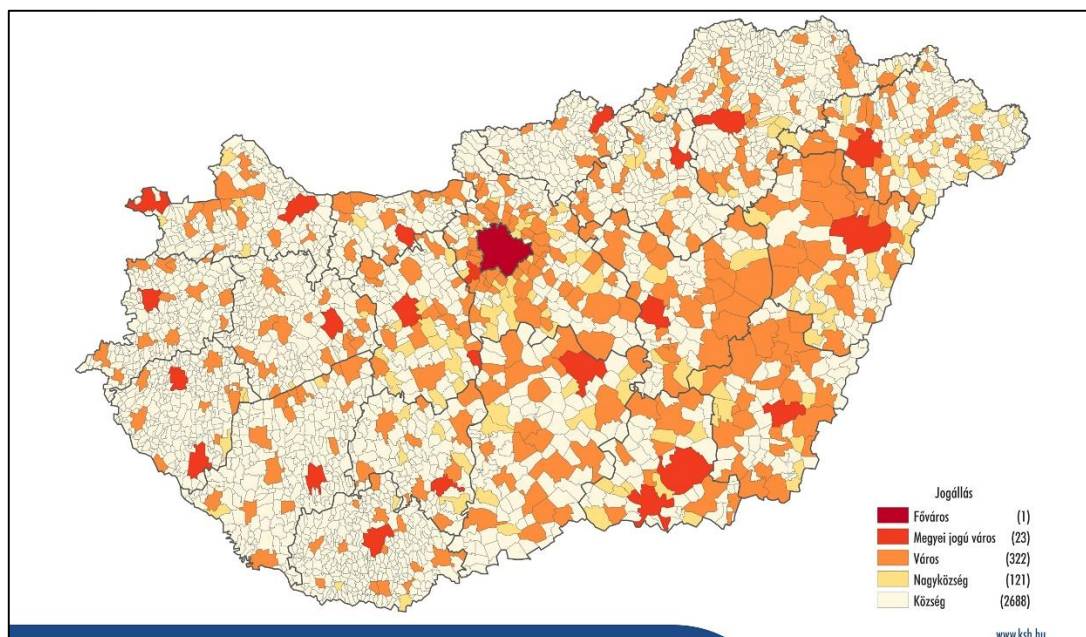
Kartogram: a térképen a területi egységek valamilyen statisztikai adatát ábrázoljuk színezéssel/vonalazással (28. ábra).

Intenzitási kartogram: a színskála a világosabbtól a sötétebb felé, a vonalazás a ritkábbtól a sűrűbb felé haladva növekedést fejez ki (29 - 31. ábra, 38 – 40. ábra).

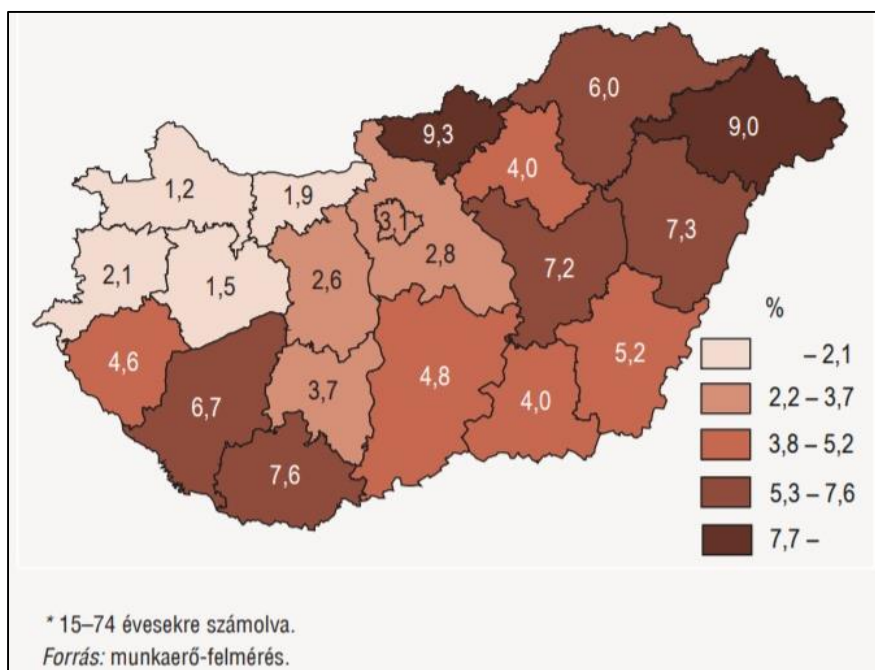
Lehetnek ponttérképek is (32. ábra, 33. ábra)

- sajátos formája, amikor pontok helyett köröket, háromszögeket, kockákat, hasábokat stb. alkalmazunk

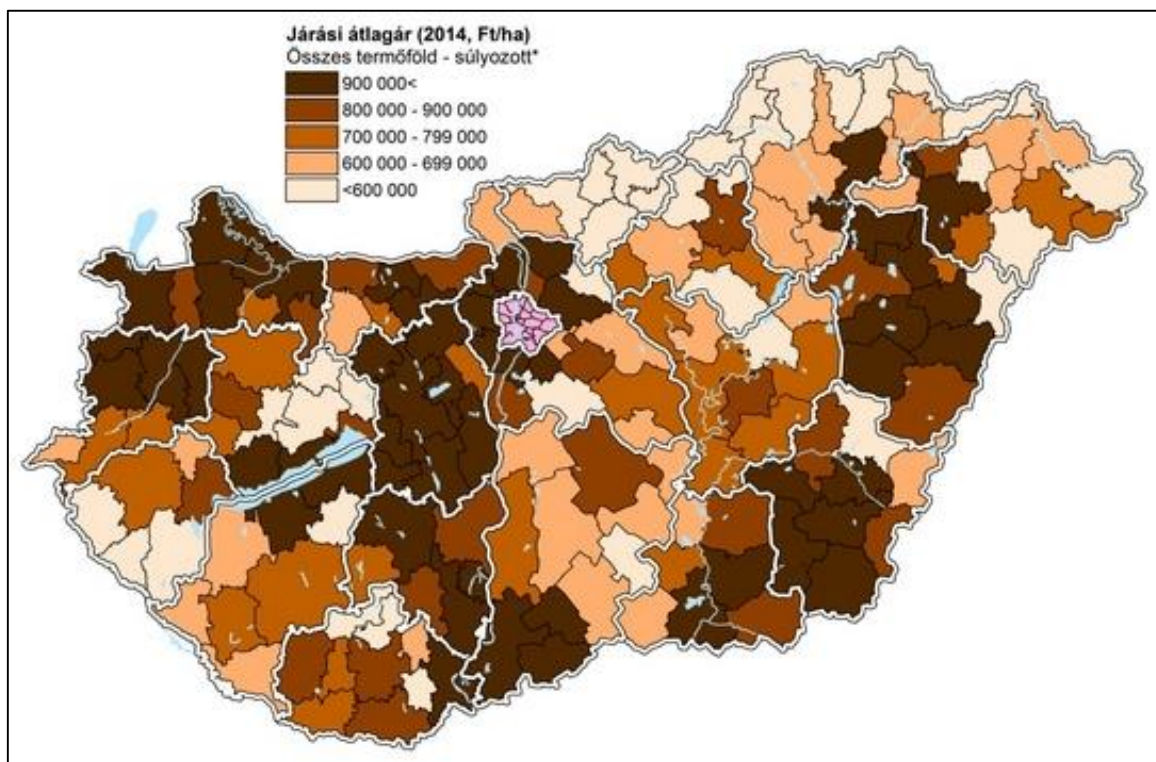
Kartodiagram: az adott területi egység valamely jellemzőjét diagram is kifejezi (34 – 37. ábra).



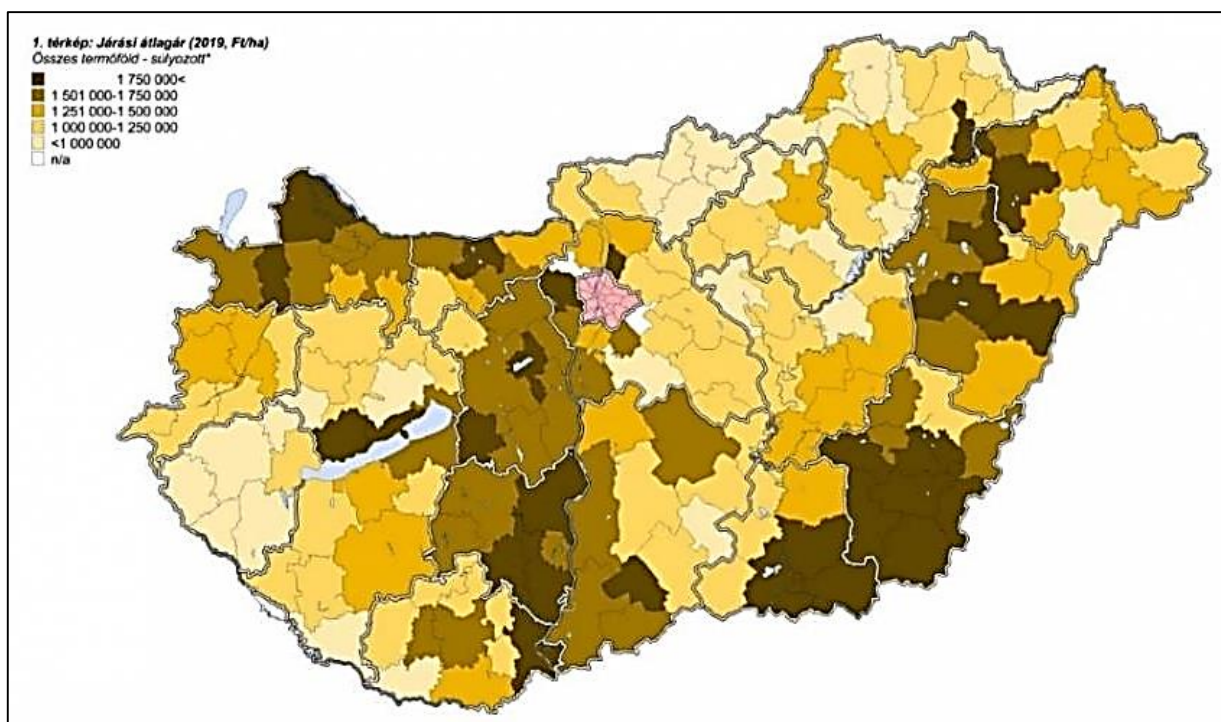
28. ábra: Magyarország települései jogállás szerint, 2016. január 1.
forrás: www.fuggelek.foldrajzmagazin.hu



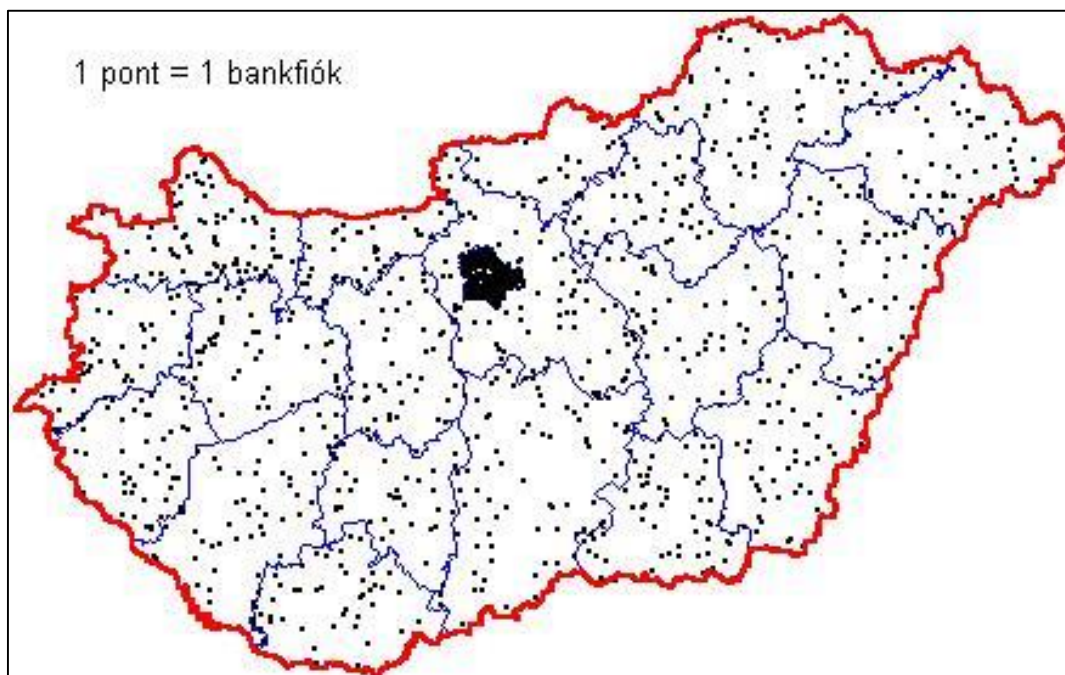
29. ábra: Munkanélküliségi ráta megyék szerint, 2017. II. negyedév
forrás: www.kamaraonline.hu



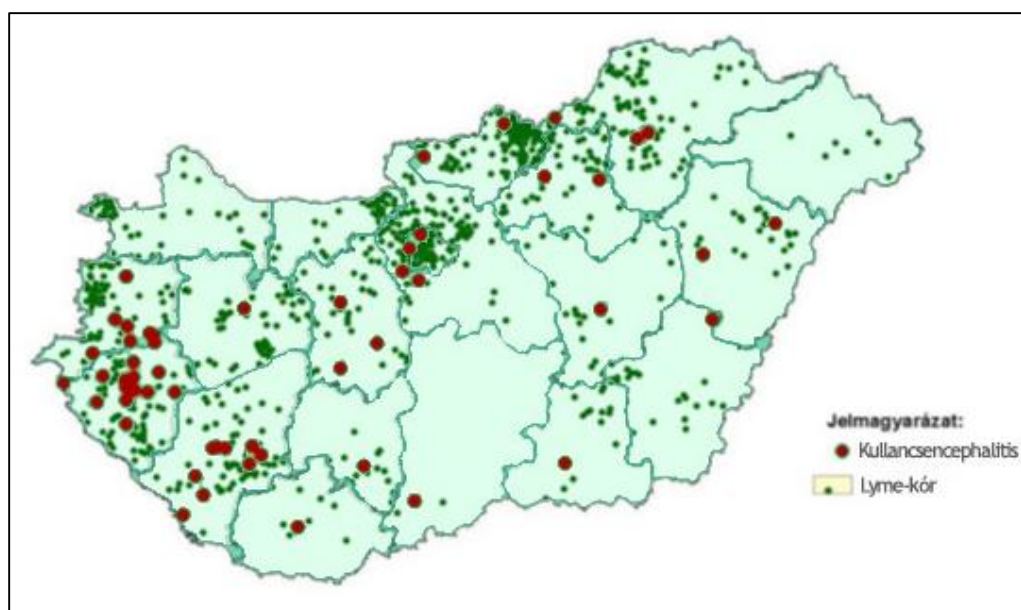
30. ábra: Az összes termőföld járási átlagára (2014, Ft/ha)
forrás: www.agrarszektor.hu



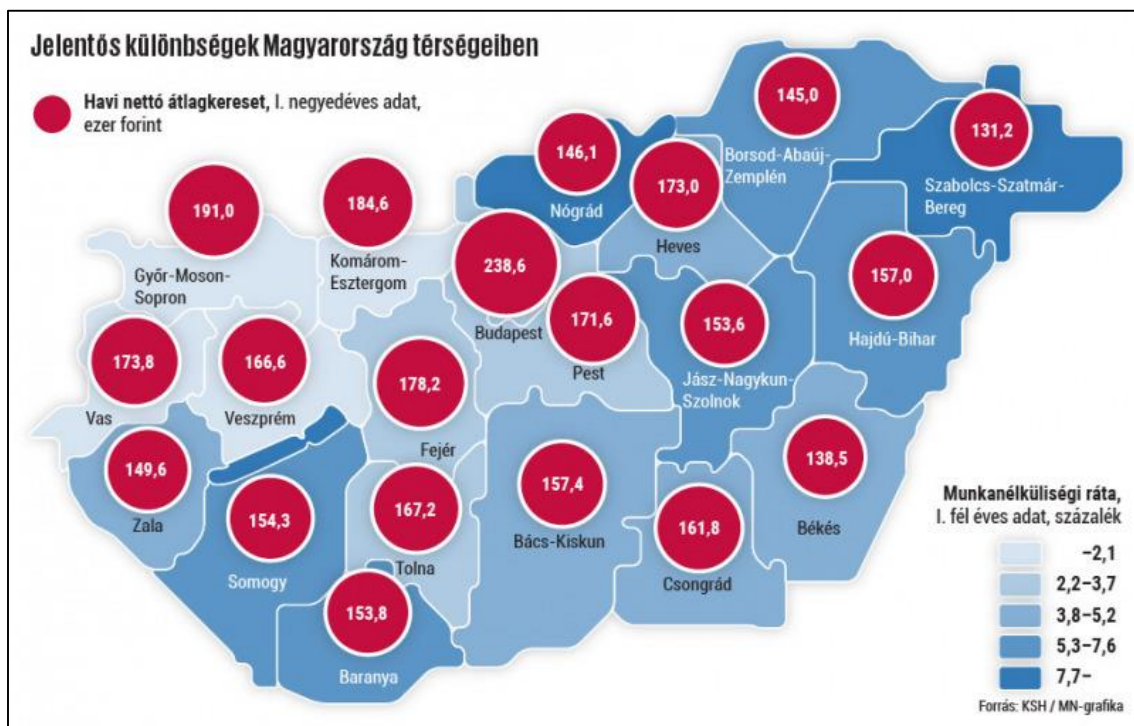
31. ábra: Az összes termőföld járási átlagára (2019, Ft/ha)
forrás: www.agrarszektor.hu



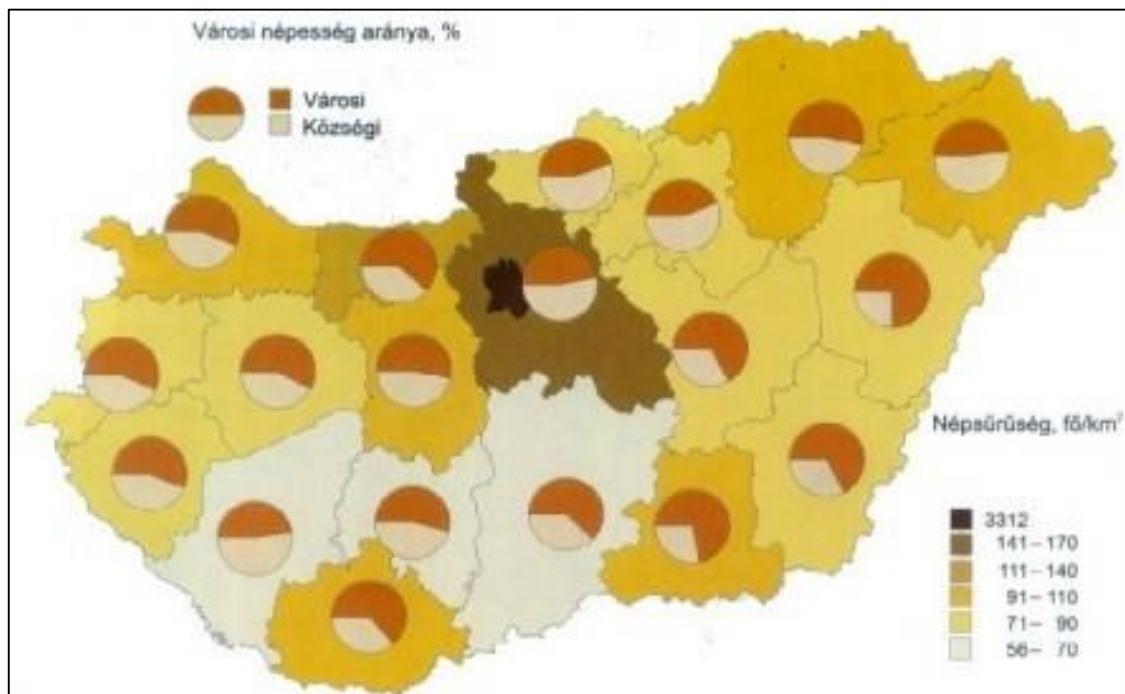
32. ábra: Bankfiókok Magyarországon
forrás: www.tankonyvtar.hu



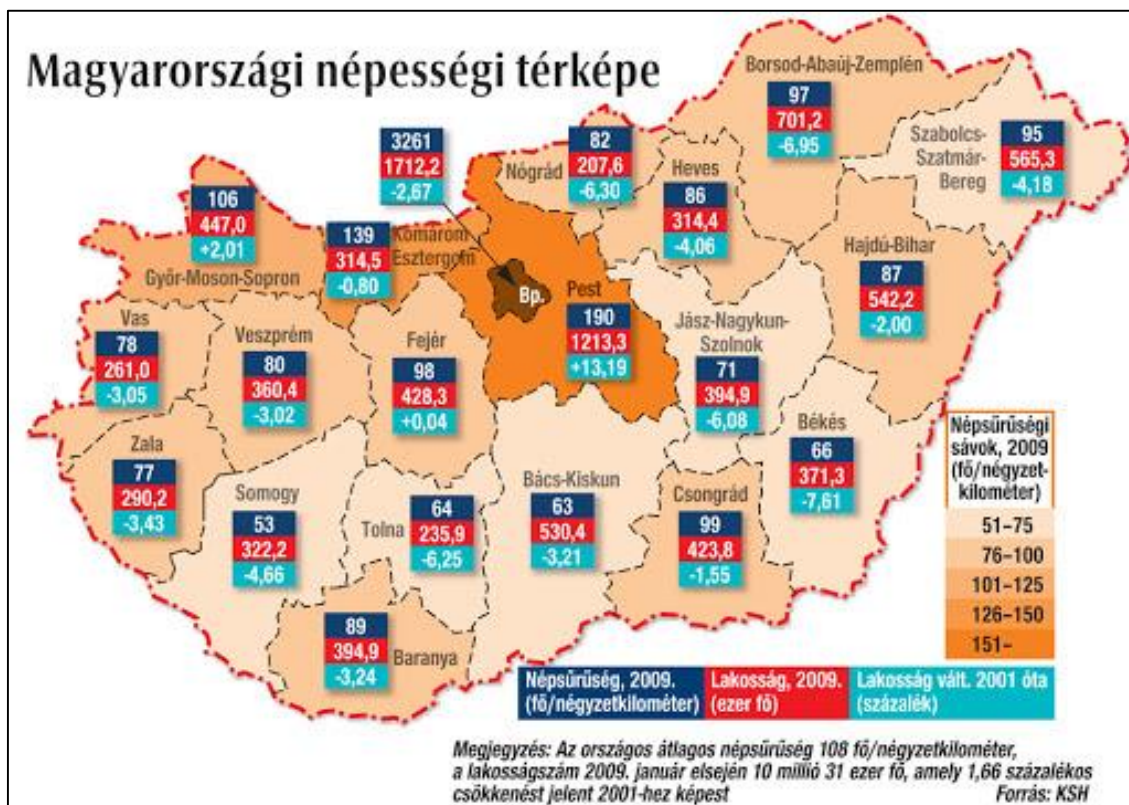
33. ábra: Kullancs által okozott megbetegedések települések szerint Magyarországon
forrás: www.webbeteg.hu



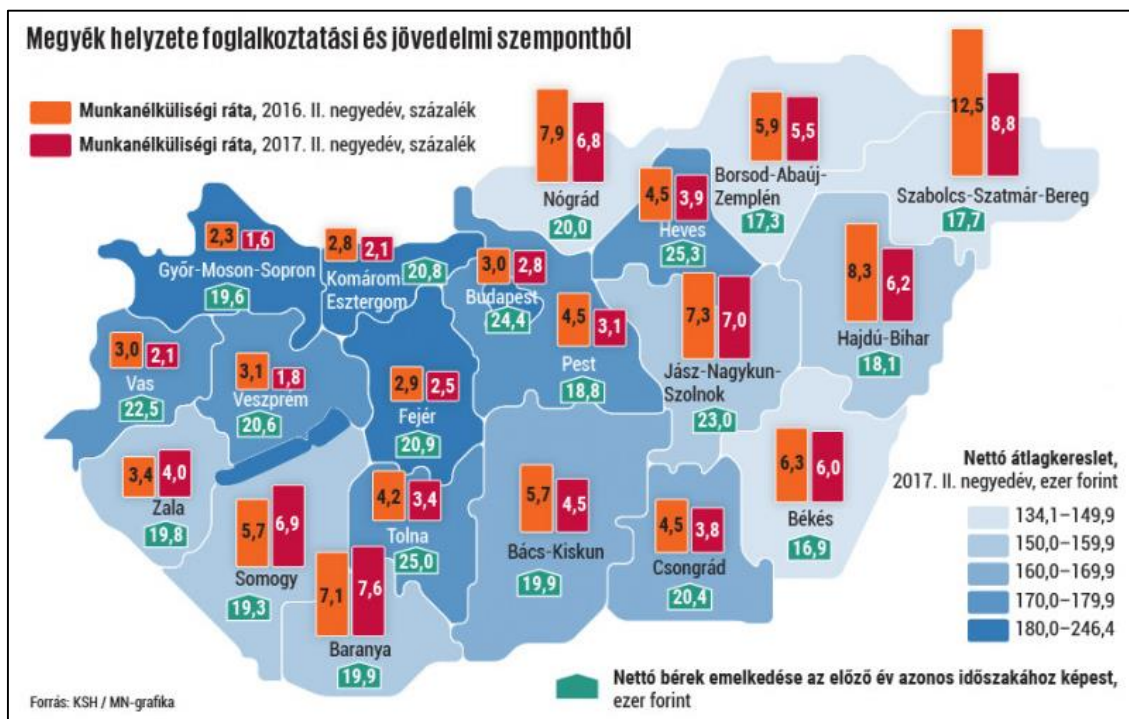
34. ábra: Munkanélküliségi ráta és havi nettó átlagkereset Magyarországon
forrás: www.szakszervezetek.hu



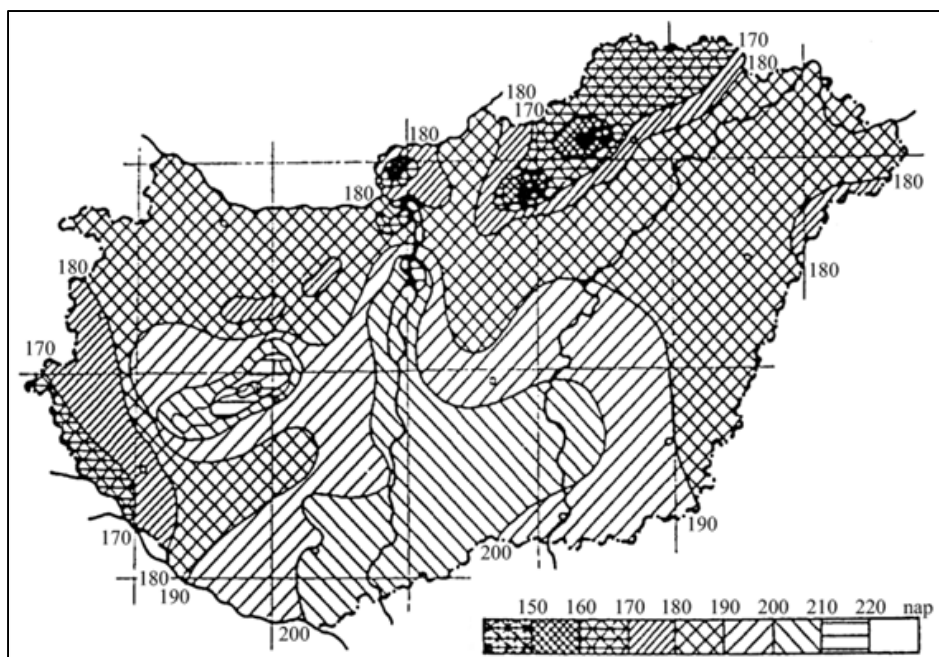
35. ábra: Népsűrűség és a városi népesség aránya
forrás: www.tankonyvtar.hu



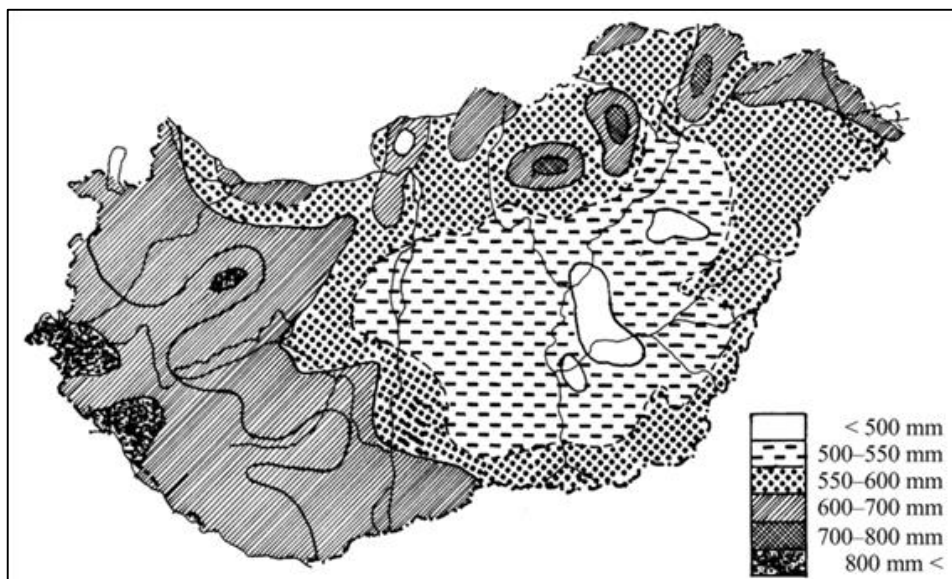
36. ábra: Magyarország népességi térképe
forrás: www.enfo.hu



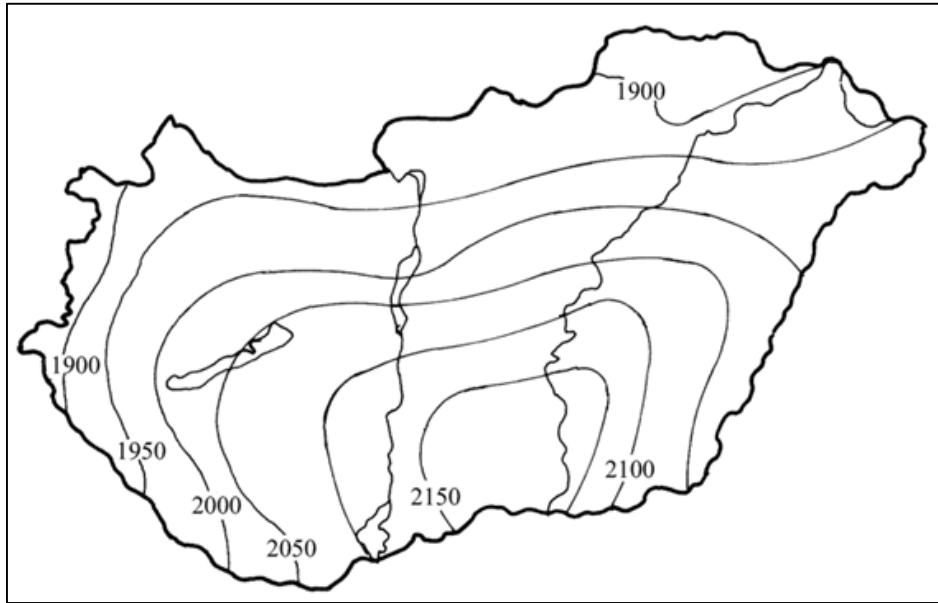
37. ábra: Megyék helyzete foglalkoztatási és jövedelmi szempontból
forrás: www.szakszervezetek.hu



38. ábra: A fagymentes időszak hossza Magyarországon
forrás: www.tankonyvtar.hu



39. ábra: Az évi átlagos csapadékösszegek területi eloszlása Magyarországon
forrás: www.tankonyvtar.hu



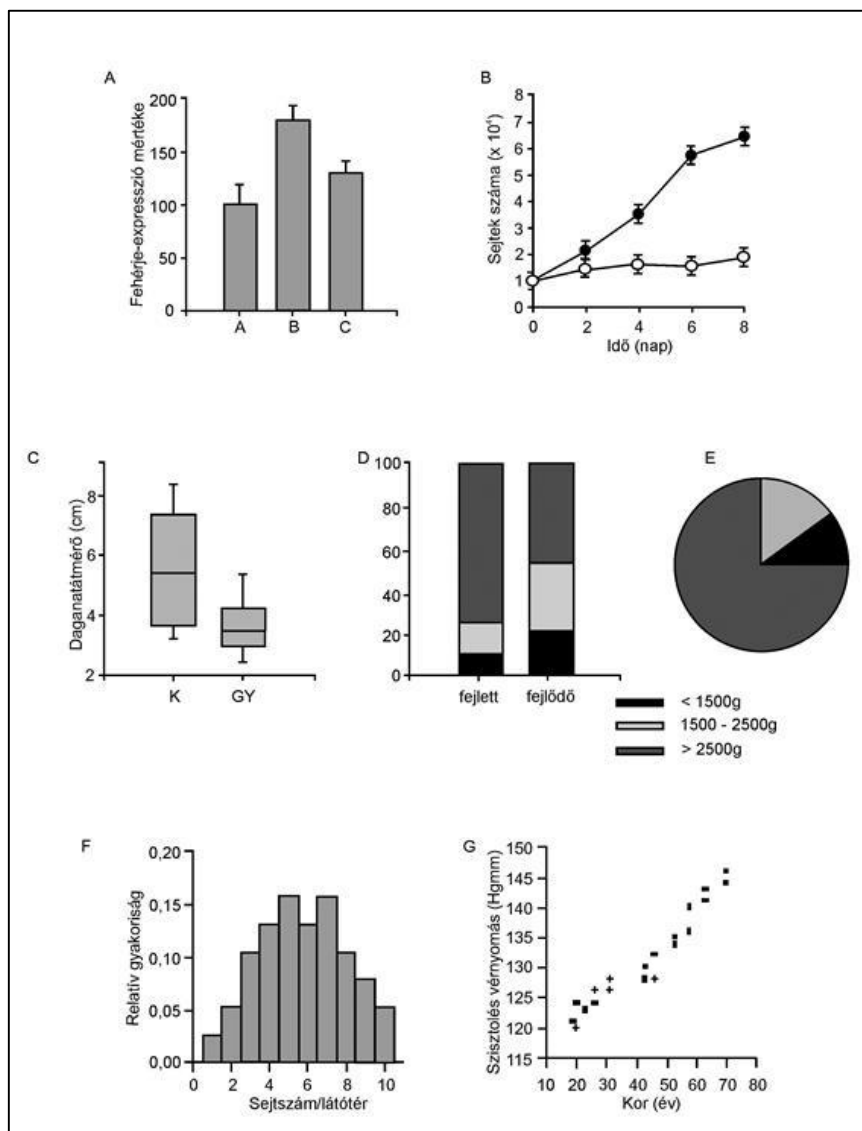
40. ábra: A napfénytartam évi összegének területi eloszlása (óra) (1951–1980)
forrás: www.tankonyvtar.hu

Piktogram:

- figurális ábrázolás;
- az adatokat azoknak a tárgyaknak, jelenségeknek a képével vagy sematizált képével fejezzük ki, amelyre az adatok vonatkoznak. (41. ábra)



41. ábra: Magas rizikójú területek Magyarországon a kullancsfertőzések tekintetében
forrás: www.gendiagnosztika.hu



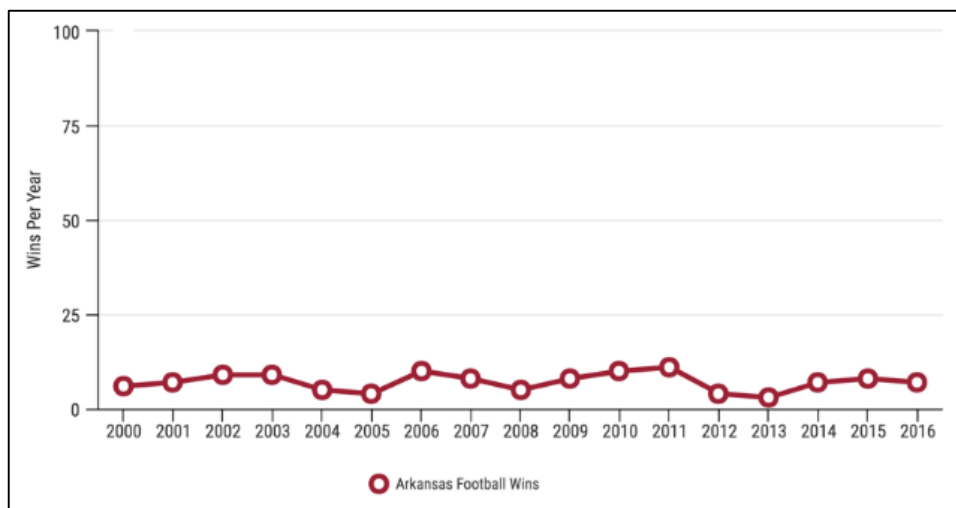
42. ábra: Különböző diagramtípusok
forrás: www.tankonyvtar.hu

A diagramok készítésének alapelvei

- legyen könnyen értelmezhető;
- szükséges és elégséges mennyiségű információt tartalmazzon;
- legyen egyszerű, célratörő címe;
- legyenek tengelyfeliratok, mértékegységek jelölve;
- fontos a jelmagyarázat, lépték;
- megfelelő legyen a skálabeosztás;
- mindig meg kell jelölni az adatok forrását (pl. lábjegyzetben);
- praktikusabb a 2D ábrázolás, mint a 3D.

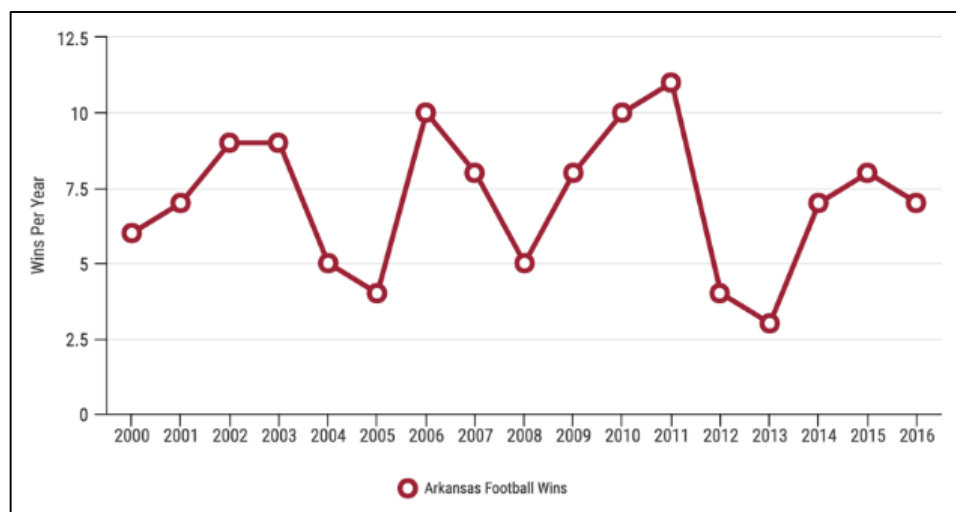
Félrevezető lehet egy grafikon, ha..

- nem 0-tól kezdődik az y tengely;
- nem megfelelő az y tengely értékeosztása (lásd a mellékelt diagramokon);
- csak bizonyos x értékekre van ábrázolva, így csak egy részletét mutatja a teljes időbeli adatsornak;
- rossz diagramtípust használ, nem megfelelő a célnak, így félrevezető vagy nem értelmezhető;
- nem a megszokott jelölésmódot használja, pl. színezésnél a világosabb szín az alacsonyabb, a sötétebb a magasabb értékeket mutatja; a zöld általában a nyereség, a piros a veszteség stb.



43. ábra: Példa rossz diagramra. Az y tengelyen az Arkansas futball csapat éves győzelmeinek száma szerepel
forrás: www.venngage.com

Az y tengelyen használt skála maximum értéke túl nagy, így torzítja az adatok időbeli változásának képét.



44. ábra: Az előző diagramon szereplő adatok helyes ábrázolása
forrás: www.venngage.com

Megfelelő maximum érték alkalmazása esetén látható az adatok valódi változásának tendenciája.

Általános matematikai műveletek, jelölések. Függvények. Trigonometria. Halmazok. Statisztikai alapok.

A következő oldalakon először további jelölések, rövidítések jelentése, illetve az alpműveletek kerülnek ismertetésre, majd a függvények, a trigonometria, a halmazok, illetve a statisztikai alapok alapvető összefüggései következnek.

Számhalmazok

- N: természetes számok halmaza
- Z: egész számok halmaza
- Q: racionális számok halmaza
- I: irracionális számok halmaza
- R: valós számok halmaza
- R^+ : pozitív valós számok halmaza

Egyéb jelölések

- Produktum: több szám összeszorzását jelöli

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$$

- Intervallumok

$[x;y]$ zárt intervallum

$(x;y)$ nyílt intervallum

Alpműveletek

- Összeadás

Azonos mértékegységek esetén használandó. Az összeadás felcserélhető művelet: $A+B = B+A$.

pl. egy kontinens teljes népessége; éves csapadékmennyiség; búza éves termésmennyisége

pl. Benelux államok népessége

A szumma ($\sum$) jelentése: 1-től n-ig minden tagok összeadunk. n jelenti az összes elemszámot.

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

- Kivonás

Azonos mértékegységek esetén használható művelet. Nem felcserélhető művelet: $A - B \neq B - A$

▪ Szorzás, osztás

Különböző mértékegységek esetén: Új mutatók állhatnak elő – pl. népsűrűség (fő/km²), sűrűség (g/cm³), csapadékintenzitás (mm/h)

Azonos mértékegységek esetén: Az osztás után mértékegység nélkülivé válhatnak – pl. városi népesség aránya

Az alpműveletek elvégzése során az egyes elnevezések a következők:

összeadás: $a + b = c$

tag + tag = összeg

szorzás: $a \cdot b = c$

tényező · tényező = szorzat

kivonás: $a - b = c$

kisebbitendő - kivonandó = különbség

osztás: $a : b = c$

osztandó : osztó = hányados

	Összeadás	Szorzás
Kommutatív - szabály	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asszociatív - szabály	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Disztributív - szabály	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	

Műveletek törtekkel

Bővítés: $\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad b \neq 0; \quad c \neq 0$

Egyszerűsítés: $\frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{a}{b} \quad b \neq 0; \quad d \neq 0$

Szorzás: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Osztás: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Összeadás: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$

Kivonás: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$

Normálalak

A számoknak 10 egész kitevőjű hatványaként felírt alakja. Használata azért is előnyös, mert nem szükséges minden számjegyet kiírni. Egy x szám normálalakját a következőképpen képezhetjük:

$$x = a \cdot 10^k$$

A képletben a k a szám karakterisztikája (karakterisztika = jellemző vonás, jellegzetesség), $k \in \mathbb{Z}$, és $1 \leq a < 10$.

pl. $10\,000 = 1 \cdot 10^4$, ahol $a = 1$, $k = 4$

7. példa: normálalak használata

Írjuk fel a következő számok normálalakját!

$$1\,350\,000 = 1,35 \cdot 10^6$$

$$0,0003 = 3 \cdot 10^{-4}$$

$$-0,5 = -5 \cdot 10^{-1}$$

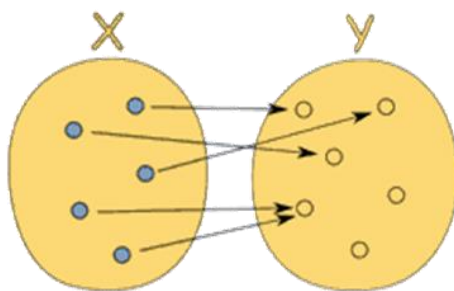
Függvények

- A függvény egy olyan hozzárendelés, ahol egy nem üres halmaz minden eleméhez (valamilyen egyértelmű módon) hozzárendeljük egy másik halmaz egy-egy elemét.
- Jelölés: f , g , h etc.
- Független változók: azok az x értékek, amelyek a függvény értelmezési tartományát alkotják.
- A függvény értékei (függő változók): azok az y értékek, amelyek a függvény értékkészletét alkotják.
- A függvénykapcsolat az y függvény értékek és az x független változó értékek között az $y = f(x)$ egyenlettel adható meg.
- Az $f(x)$ jelentése: az f függvény helyettesítési értéke az x helyen.
- Szemléletes megjelenítésükre jól alkalmazható: MAPLE, MATLAB

$$f(x) = x^2$$

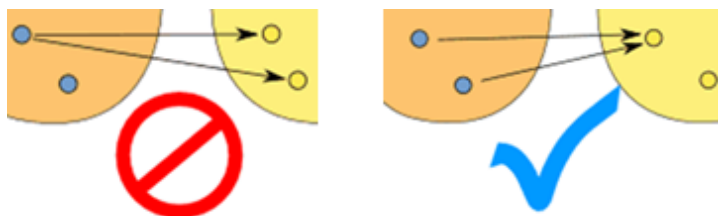
függvény neve behelyettesítés a függvény értéke az x helyen

- A függvény egy halmaz minden egyes elemét összefüggésbe hozza a másik halmaz pontosan egy elemével (tehát az x értékekhez rendel y értékeket).



45. ábra: A függvény minden x értékhez egy y értéket rendel hozzá. Különböző x értékekhez tartozhat ugyanaz az y érték
forrás: www.mathsisfun.com

Megjegyzés: Az „egy a sokhoz” nem megengedett (46. ábra, bal oldali ábra), de a „sok az egyhez” megengedett (46. ábra, jobb oldali ábra).

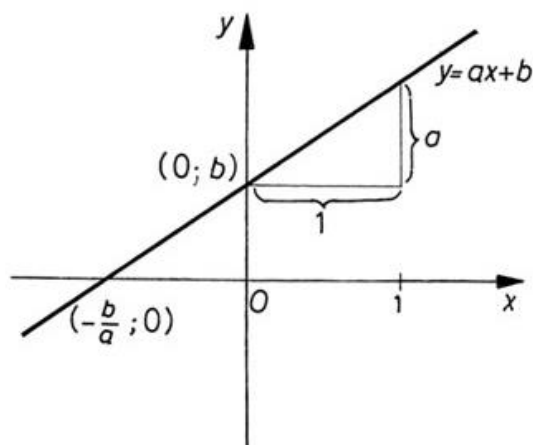


46. ábra: Egy x értékhez csak egy y érték tartozhat
forrás: www.mathsisfun.com

Függvénytípusok

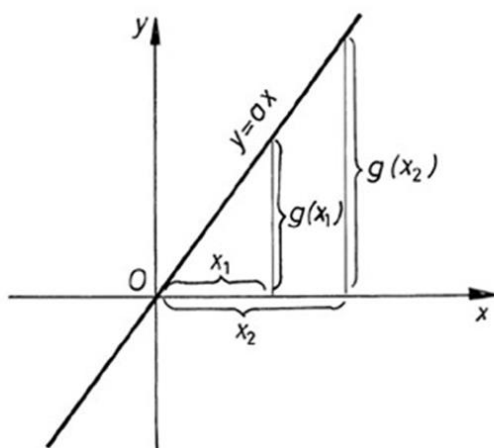
1, Lineáris függvények

- Elsőfokú függvény
 - Az $f(x) = a \cdot x + b$ ($a \neq 0$) függvény a valós számok halmazán értelmezett.
 - A grafikonja egy egyenes, a meredekségét az „ a ” adja meg és az y tengellyel való metszéspontját a „ b ”.



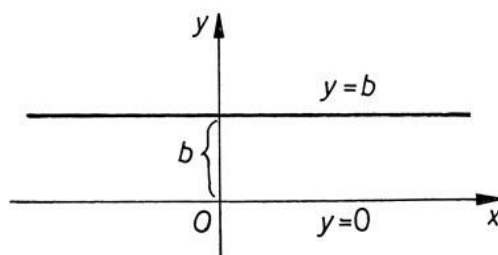
47. ábra: Az elsőfokú függvény képe
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

- Egyenes arányosság
 - speciális elsőfokú függvény
 - $b = 0$, így $f(x) = a \cdot x$
 - Az értelmezési tartomány minden elemét hozzárendeljük az értékük „a”-szorosához.
 - A grafikon egy egyenes, amelynek meredeksége „a” és metszi az origót.



48. ábra: Az egyenes arányosság függvénye
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

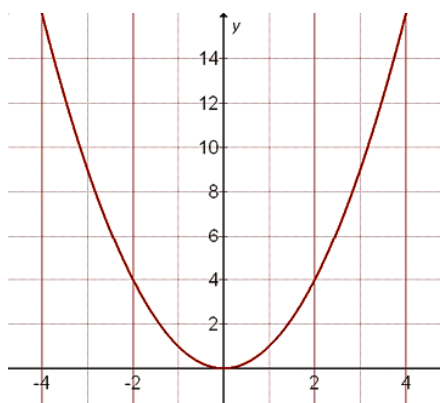
- nulladfokú polinomok vagy konstansfüggvények
 - speciális elsőfokú függvény
 - $f(x) = b$
 - Az értelmezési tartomány minden értékéhez a „b” értéket rendeli.
 - A grafikon egy egyenes, a meredeksége 0, így párhuzamos az x tengellyel és az egyenes az y tengelyt b-ben metszi.
 - A függvény konstans.



49. ábra: Konstans függvény képe
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

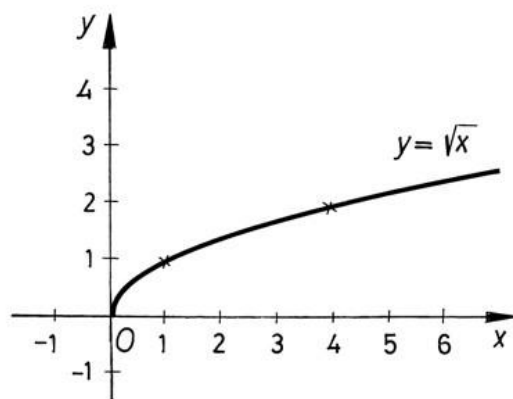
2, Nemlineáris függvények

- másodfokú függvény (polinomfüggvény)
 - $f(x)=a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ($a \neq 0$) Az értelmezési tartomány minden értékéhez azok négyzetét rendeljük hozzá.
 - Értelmezési tartomány: valós számok halmaza
 - Értékkészlet: a nemnegatív valós számok halmaza
 - A grafikonja parabola.
 - A függvény csökken, ha $x \leq 0$, illetve nő, ha $x \geq 0$.
 - Az $x = 0$ helyen minimumhelye van.



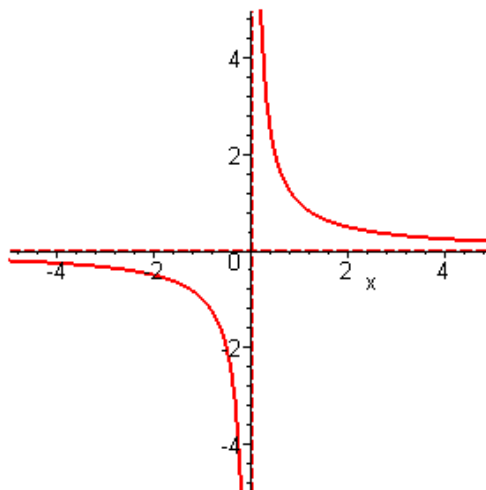
50. ábra: Az $f(x) = x^2$ függvény képe
forrás: www.nkp.hu

- négyzetgyök függvény
 - $f(x)=\sqrt{x}$
 - Az értelmezési tartomány minden eleméhez annak négyzetgyökét rendeljük hozzá.
 - Értelmezési tartomány: a nemnegatív valós számok halmaza.
 - Értékkészlet: a nemnegatív valós számok halmaza.
 - A függvény nő, ha $x \geq 0$; minimuma van az $x=0$ helyen.



51. ábra: A négyzetgyök függvény képe
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

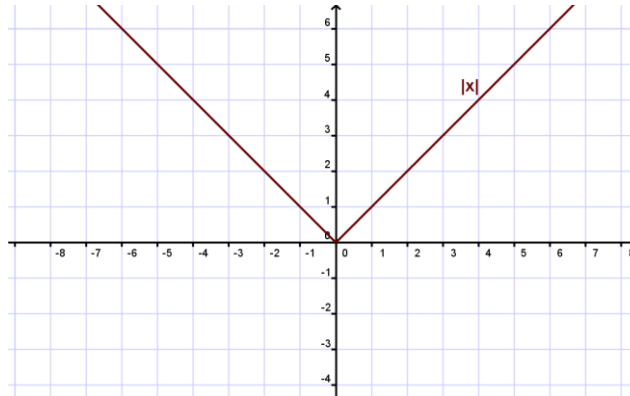
- Fordított arányosság
 - Az $f(x) = \frac{a}{x}$ ($x \neq 0$, $a \neq 0$) függvény a valós számok halmazán (vagy egy részhalmazán) értelmezett, kivéve a 0.
 - Értelmezési tartomány: a valós számok halmaza, kivéve a 0.
 - Értékkészlet: a valós számok halmaza, kivéve a 0.
 - A függvény nincs értelmezve az $x = 0$ helyen.
 - A grafikonja hiperbola.



52. ábra: A hiperbola
forrás: www.logaphics.weebly.com

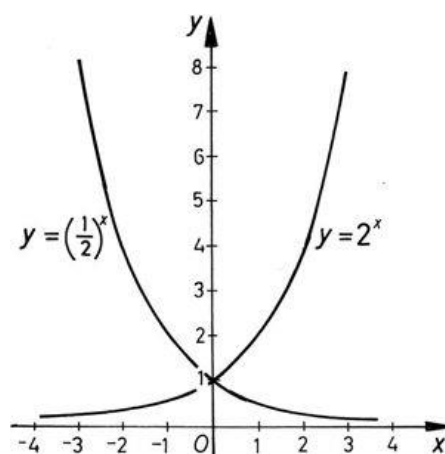
- abszolútérték függvény
 - $f(x) = |x|$
 - Az értelmezési tartomány minden eleméhez azok abszolútértékét rendeljük hozzá.
 - Értelmezési tartomány: a valós számok halmaza.
 - Értékkészlet: a nemnegatív számok halmaza.

- A grafikonja két egyenesből áll.
- A függvény csökken, ha $x \leq 0$; illetve nő, ha $x \geq 0$.
- A függvénynek minimumpontja van $x = 0$ helyen.



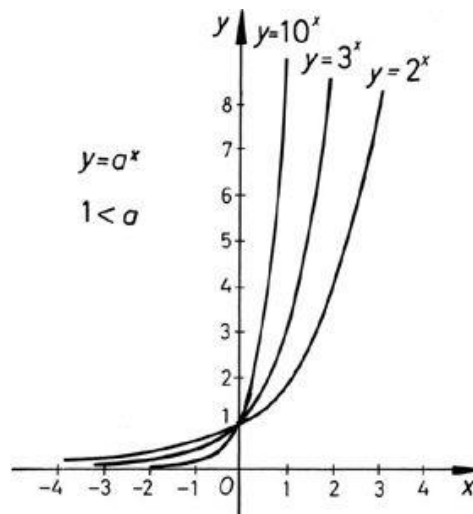
53. ábra: Az abszolútérték függvény képe
forrás: www.quizlet.com

- Exponenciális függvény
 - $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = c \cdot a^x$, ahol $a > 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$
 - $a \in \mathbb{R}^+$, $a > 1$ vagy $1 > a > 0$
 - A hatvány alapja konstans, a függvény változója a kitevőben van és a függvény értéke megegyezik hatvány értékével.
 - Értelmezési tartomány: a valós számok halmaza
 - Értékkészlet: a nemnegatív valós számok halmaza
 - A függvény monoton nő, ha $a > 1$ és monoton csökken, ha $0 < a < 1$.
 - Természetes alapú exponenciális függvény: $f(x) = e^x$ ($e = 2,711828..$)



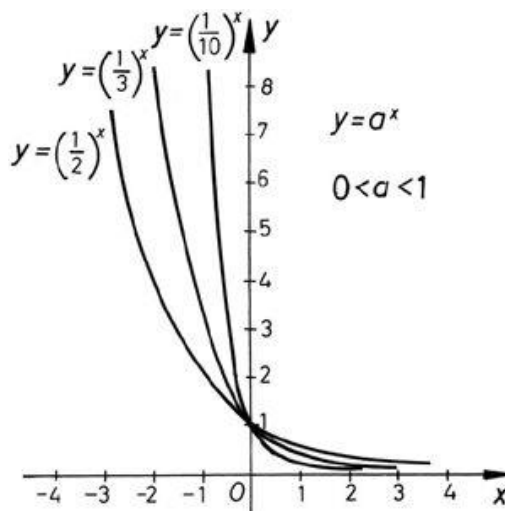
54. ábra: Az exponenciális függvény képe egész- és tört alappal
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

- › Exponenciális függvények különböző alappal, választható x értékekkel a kitevőben:



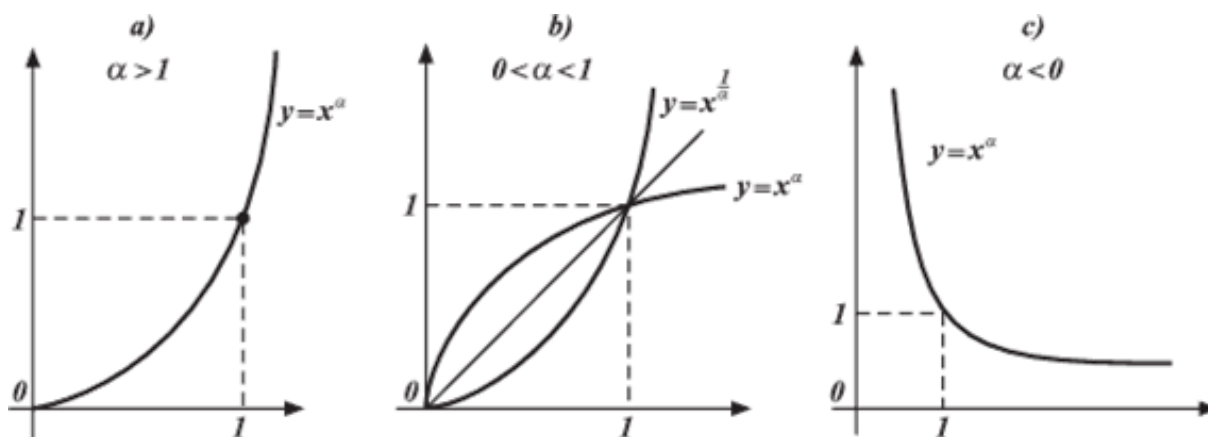
55. ábra: Az exponenciális függvény képe különböző egész alapokkal
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

- › Az exponenciális függvény alapja tört:



56. ábra: Az exponenciális függvény képe különböző tört alapokkal
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

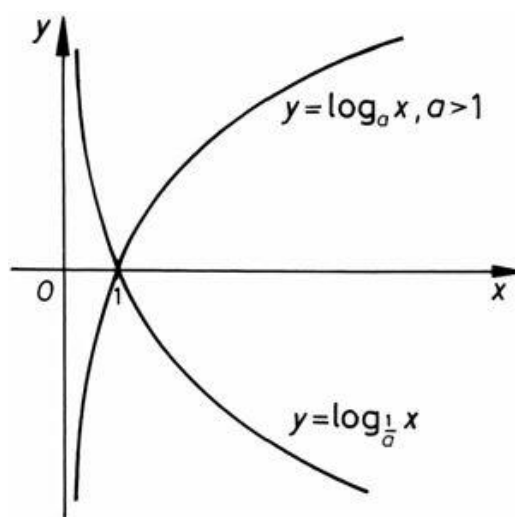
- Hatványfüggvény
 - $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = a \cdot x^b$, ahol $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 - $b > 1$ esetén a másodfokú függvényhez hasonlít,
 - $b = 1$ esetén lineáris,
 - $0 < b < 1$ esetén a gyökfüggvényhez hasonlít, $b < 0$ esetén az $1/x$ függvényhez hasonlít.



57. ábra: A hatványfüggvény képe különböző kitevők esetén
forrás: www.tankonyvtar.hu

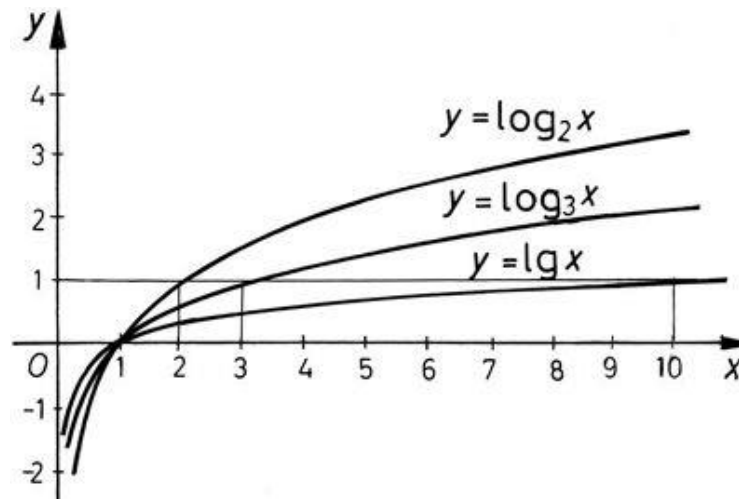
- Logaritmus függvény

- $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \log_a x$, ahol $a > 0$, $a \neq 1$
- Ez a függvény minden pozitív számra értelmezett és az értelmezési tartomány minden eleméhez annak „a” alapú logaritmusát rendeli ($a > 1$, $0 < a < 1$).
- $x = a^y$
- Értelmezési tartomány: a nemnegatív valós számok halmaza
- Értékkészlet: a valós számok halmaza
- A függvény monoton nő, ha $a > 1$ és monoton csökken, ha $0 < a < 1$.



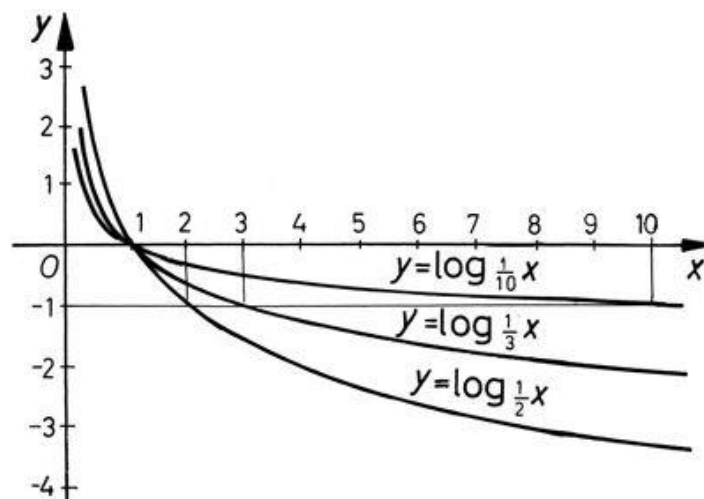
58. ábra: Logaritmusfüggvény egész- és tört alappal
forrás: www.tudaszbasz.sulinet.hu

- A logaritmusfüggvény értéke mindig 0 (tehát $y = 0$), amikor az x érték 1, mert $a^0 = 1$ (az „ a ” bármilyen szám lehet, mivel ez a logaritmus alapja).
- Logaritmusfüggvények különböző alapokkal:



59. ábra: Logaritmusfüggvények különböző egész alapokkal
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

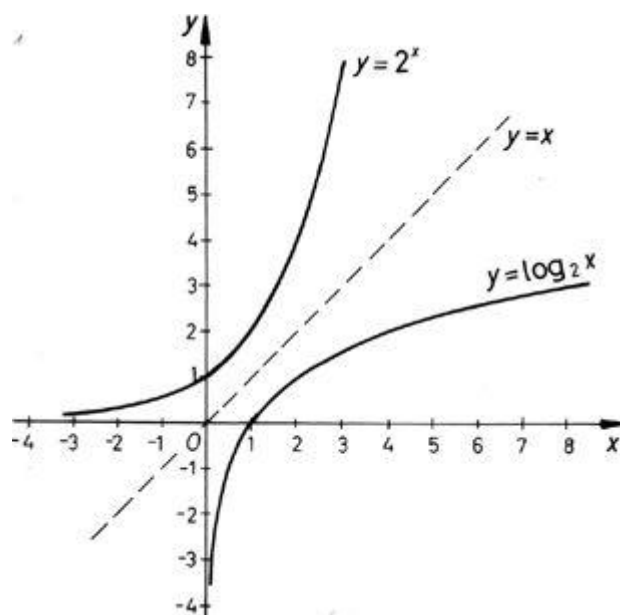
- Logaritmusfüggvények tört alapokkal:



60. ábra: Logaritmusfüggvények különböző tört alapokkal
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

Inverz függvények

- Logaritmus függvény az exponenciális függvény inverze.
- Lineáris függvény inverze mindig lineáris.
- x és y értékek felcserélésével kapjuk.



61. ábra: Az exponenciális- és a logaritmus függvény egymás inverz függvényei
forrás: www.tudaszbasz.sulinet.hu

Logaritmikus skálázás

Ha az adatokban nagyságrendi különbségek fordulnak elő, akkor indokolt. Lineáris koordinátatengely esetén az értékek lineárisan nőnek a távolsággal. pl. 0; 5; 10; 15...egyenlő távolságokra helyezkednek el egymástól. Logaritmikus skálázás esetén az értékek logaritmusuk nő a távolsággal egyenes arányban. pl. 0,01; 0,1; 1; 10; 100...helyezkednek el egymástól egyenlő távolságra. A logaritmikus skálázás csak pozitív értékek esetén alkalmazható és nincs a tengelynek 0 pontja. Ez a megoldás tehát a „nagy” értékeket „közelebb” hozza, viszont a „kis” értékek közti különbséget „felnagyítja”. (Telbisz et al., 2013, p. 21) Előnye tehát, hogy nagyon kicsi és nagyon nagy értékeket egyszerre tudunk szemléltetni egy ábrán.

„Ha függvényeket ábrázolunk, akkor lehet csak az x , vagy csak az y , vagy mindkét tengely logaritmikus skálájú” (Telbisz et al., 2013, p. 21). Az első két esetben szemi-logaritmikus koordinátarendszerről beszélünk (meg kell adni, melyik tengely a logaritmikus). Utóbbi esetben logaritmikus (log-log) koordinátarendszerről beszélünk (nem feltétlenül azonos alappal).

A logaritmikus skálázás természetesen megváltoztatja a függvények képét is: a hatványfüggvény logaritmikus (log-log) ábrázolás esetén lesz egyenes; az exponenciális függvény az y tengelyt megváltoztató szemilogaritmikus skálázás esetén lesz egyenes; a logaritmus függvény az x tengelyt megváltoztató szemilogaritmikus skálázás esetén lesz egyenes. (Telbisz et al., 2013, p. 21)

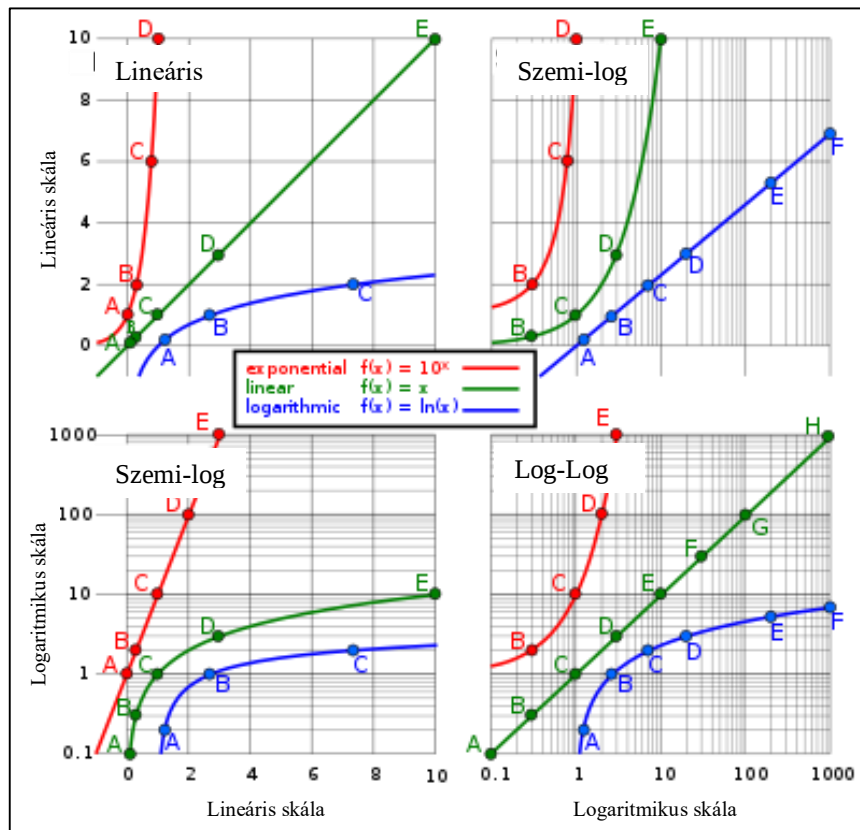
Fontos: a logaritmikus skálázás és a logaritmus függvény nem ugyanaz ²⁸

Használata előnyös:

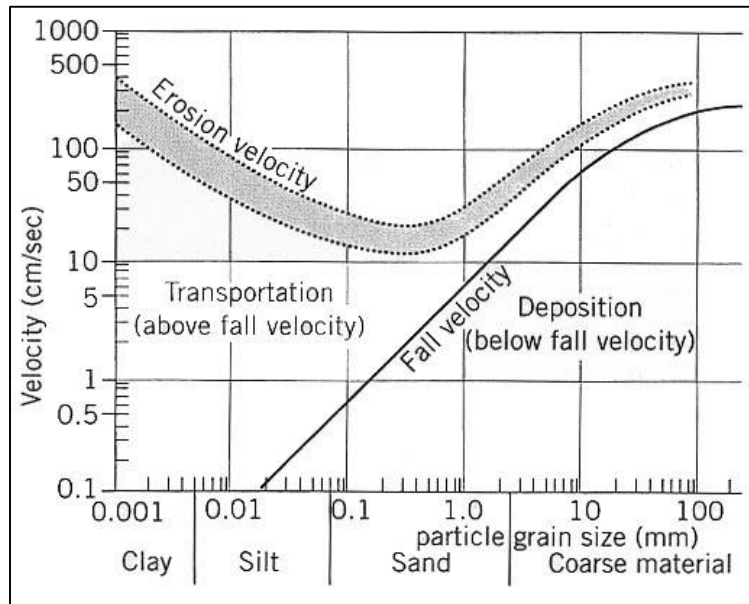
- Árfolyam változás mértékének meghatározása
- Richter skála
- Földtörténet évszámai, földrajzi atlaszokban

²⁸ forrás: Telbisz et al., 2013

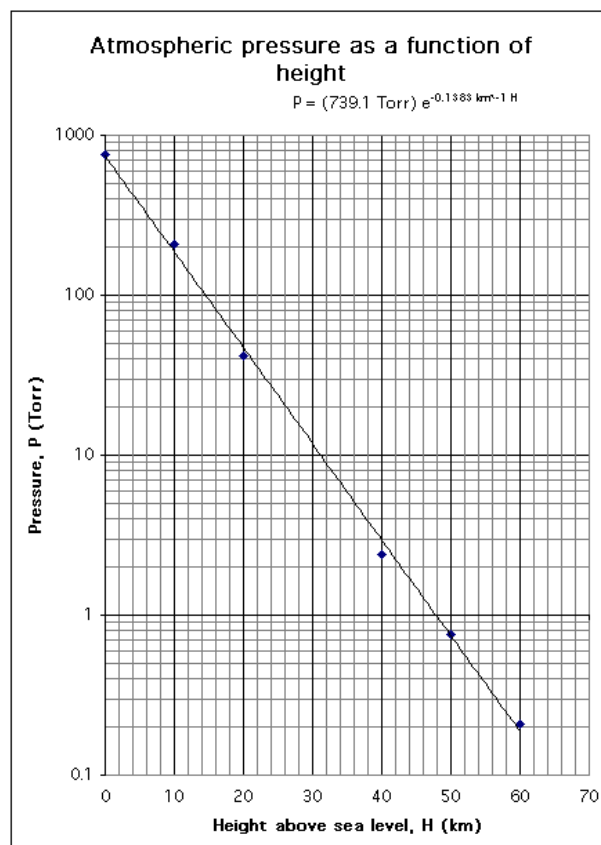
- Hangerősség (dB)
- Radioaktív bomlás
- méret szerinti eloszlások
- népességszám alakulása
- GDP, termelés



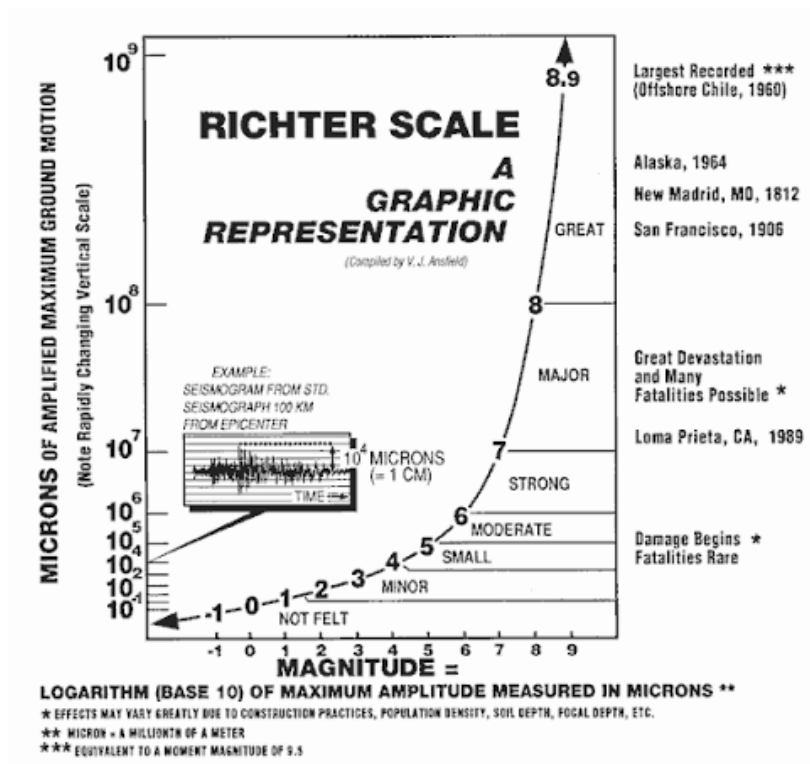
62. ábra: A különböző függvények képe lineáris, szemi-log, illetve log-log skálán
forrás: www.en.wikipedia.org



63. ábra: A Hjulström-görbe. Mindkét tengely logaritmikus skálájú
forrás: www.wordpress.com



64. ábra: Az y tengely logaritmikus skálájú
forrás: www.geol.lsu.edu



65. ábra: A Richter-skála grafikus megjelenítése. Az y tengely logaritmikus skálájú
forrás: www.geo41.com

Trigonometria

A trigonometria olyan csoportja a matematikai műveleteknek, amely szögekkel, és arányokkal foglalkozik. A „trigon” – háromszög, és a „metron” – megfigyelés szavakból származik.

Olyan ismeretlenek, mint egy háromszög szöge, vagy egyik oldalának mérete meghatározható. Fontos továbbá a ciklikus jelenségek (hullám-mozgások, rezgések) vizsgálata során. A háromszögek és a körök közötti összefüggés is a trigonometria alapját képezi. Felismerése az ókori görögökhöz kapcsolódik.

Szögek és radián közti átváltás:

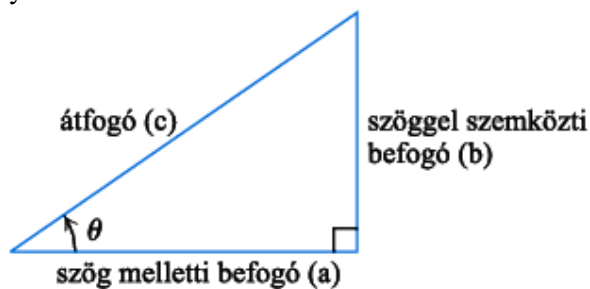
$$\text{rad} = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$$

pl. 60° átváltása radiánba: $x = \frac{60^\circ}{180^\circ} \cdot \pi = \frac{1}{3} \cdot \pi = \frac{\pi}{3}$ radián

$$1 \text{ radián} = \frac{360^\circ}{\pi} = 57,296^\circ$$

$$1 \text{ fok} = \frac{2 \cdot \pi}{360^\circ} = 0,017 \text{ radián}$$

Hegyesszögek szögfüggvényei



66. ábra: A derékszögű háromszög befogói és átfogója
forrás: www.tankonyvtar.hu

Alapvető trigonometrikus függvények:

$$\sin \theta = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{b}{c}$$

$$\csc \theta = \frac{\text{átfogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}} = \frac{c}{b}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}} = \frac{a}{c}$$

$$\sec \theta = \frac{\text{átfogó}}{\text{szög melletti befogó}} = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}} = \frac{b}{a}$$

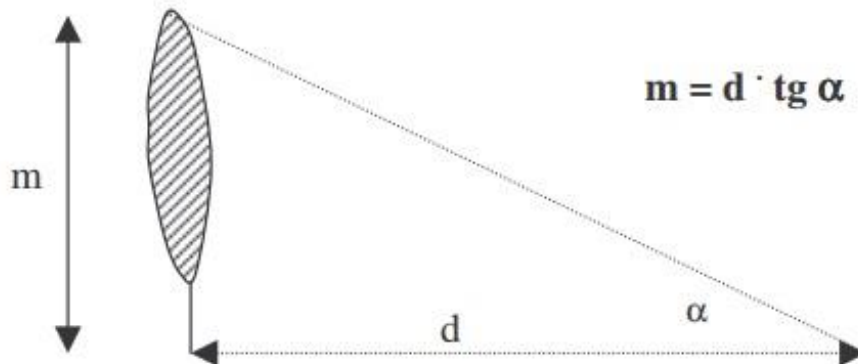
$$\operatorname{cot} \theta = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}} = \frac{a}{b}$$

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctg	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

67. ábra: Nevezetes szögek szögfüggvényei
forrás: www.tankonyvtar.hu

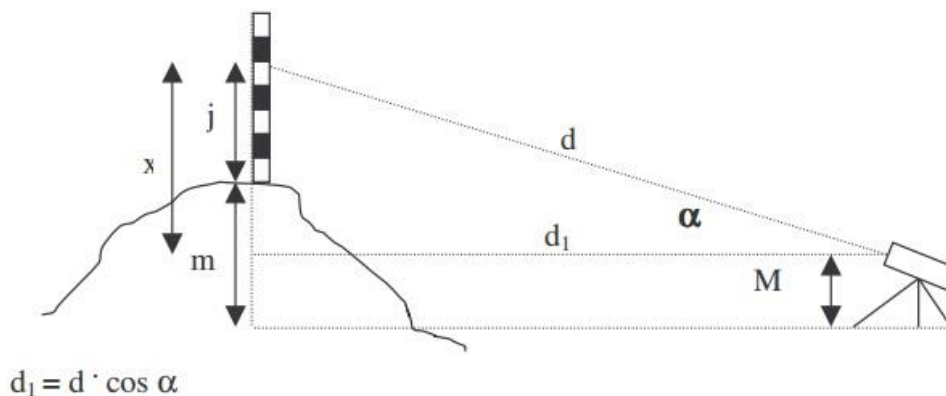
Geográfiai alkalmazások - példa

- “Sík terepen a mérhető (megközelíthető) távolságban elhelyezkedő tereptárgyak (fa, épület, feltárás, stb.) magassága a távolság és a magassági szög ismeretében meghatározhatók” (Lóki&Demeter, 2009, p. 30).



68. ábra: Tereptárgy meghatározása sík terepen
forrás: Lóki&Demeter, 2009

- “Domb- és hegyvidéki területen a terepi felméréseknél használt képleteket használjuk” (Lóki&Demeter, 2009, p. 30).

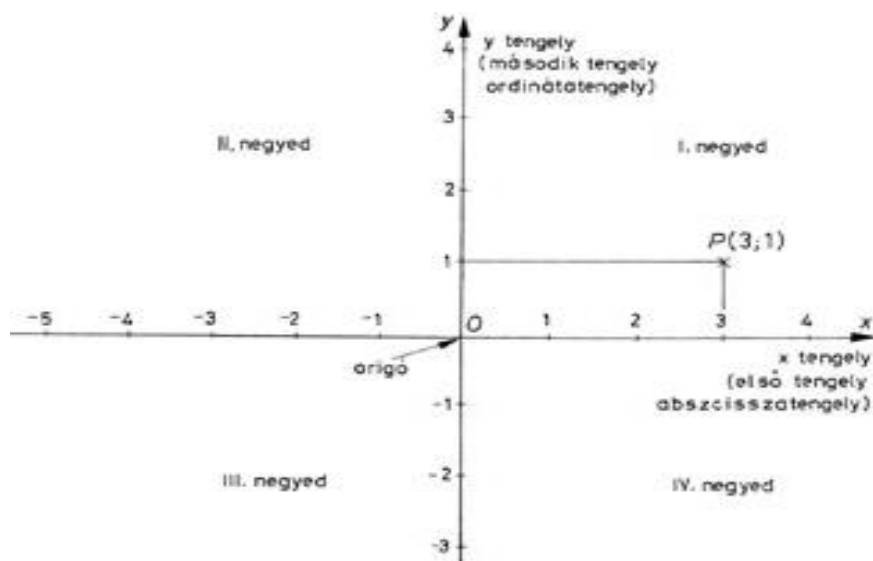


69. ábra: Tereptárgy magasságának meghatározása domb- és hegyvidéki területen
forrás: Lóki&Demeter, 2009

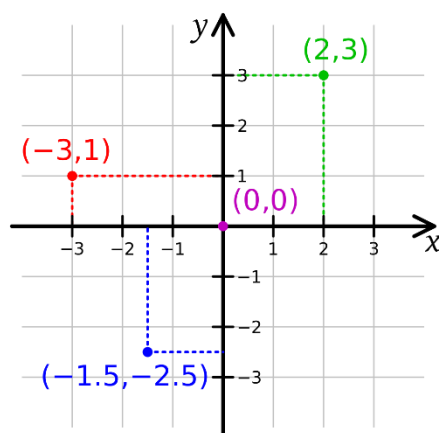
Pont helye a koordináta rendszerben

A koordinátarendszerek, ezen belül is a Descartes-féle koordinátarendszer az alapja számos térképezési, térinformatikai, függvénytani, koordinátageometriai stb. feladatnak. Ábrázolhatunk pontokat (70. és 71. ábra), felvehetjük egy függvény képét egy meghatározott értelmezési tartományon, vagy akár vektorokat és különböző síkidomokat is képezhetünk (pl. háromszög, kör stb.). A feladat jellegétől függően számos alkalmazási módja ismert.

A jegyzetben először részletesebben a vektorokkal, majd a kétdimenziós Descartes-féle koordinátarendszer alkalmazási területeivel foglalkozunk. Megjegyzendő, hogy az itt említett alkalmazások csak kisszámú példát jelentenek, részletesebben az adott szakterületeken fellelhető példák szolgálnak forrásul.



70. ábra: Pont helye a koordináta rendszerben
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu



71. ábra: Pontok a koordináta rendszerben és koordinátáik
forrás: www.wikipedia.org

Vektorok

A következőkben a Descartes-féle koordináta rendszerben képezhető vektorok tulajdonságait, illetve az alapműveleteket tekintjük át, kétdimenziós koordináta rendszer esetén.

A vektormennyiség olyan mennyiség, amelynek iránya és nagysága is van. pl. sebesség, elmozdulás, gyorsulás, mágneses tér, erő.

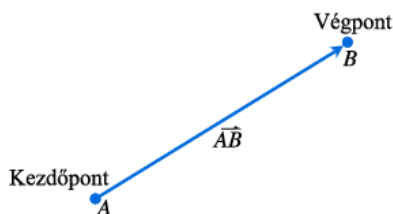
Vektor jelölése: pl. $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$

„A vektor hosszát a vektor abszolútértékének nevezzük” (Hajnal, 1987). Jelölése: $|\vec{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$ ²⁹

²⁹ forrás: Hajnal, 1987

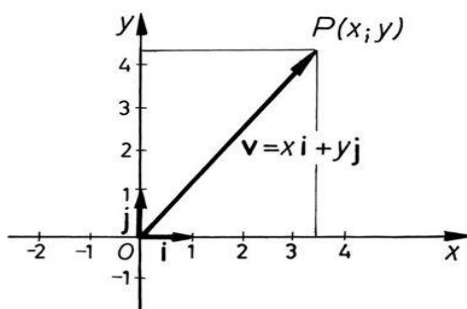
A vektor iránya egy referencia értékhez képesti elfordulás. Pl. meteorológia – szélirány, É-i irány a 0° , K-i 90° , D-i 180° , Ny-i 270° . *Megjegyzés: a szél iránya: az az irány, ahonnan a szél fúj.*

A vektormennyiséggel ellentétben a skalármennyiség: csak nagysága van. pl. távolság, idő, tömeg.



72. ábra: Az A és B kezdő- és végpontokkal megadott AB vektor
forrás: www.tankonyvtar.hu

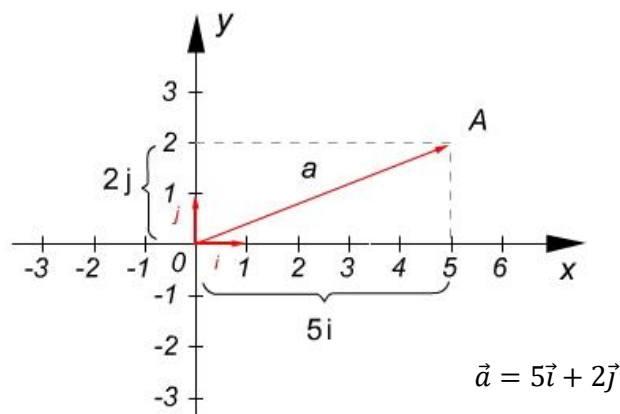
- Nullvektor: a kezdő és végpontja egybe esik (abszolútértéke 0), illetve iránya tetszőleges. Jelölése: $\mathbf{0}$.³⁰
- Helyhez kötött vektor (helyvektor): kezdőpontja a térben egy fix pont (koordinátarendszerben az origó). A kezdőpont helyzete lényeges a fizikai hatás megváltozása során (pl. erő támadáspontja).
- Szabad vektor: a térben önmagukkal párhuzamosan bárhová eltolhatók anélkül, hogy megváltoznának.
- Egységvektor: egységnyi hosszúságú vektor.
- Ellentett vektorok: egymással párhuzamosak, azonos nagyságúak, de ellentétes irányúak.
- Két vektor *egyenlő*, ha abszolútértékük egyenlő, párhuzamosak és azonos irányításúak.³¹
- Bázisvektorok: A derékszögű koordináta rendszerben az origóból kiinduló, egységnyi hosszúságú vektorok. Az x tengellyel párhuzamos vektort i -vel jelöljük (i . bázisvektor), az y tengellyel párhuzamosat j -vel jelöljük (j . bázisvektor). Bármely vektor felbontható az egységnyi hosszúságú bázisvektorokkal összetevőire.



73. ábra: Helyvektor kifejezése bázisvektorokkal
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

³⁰ forrás: Hajnal, 1987

³¹ forrás: Hajnal, 1987



74. ábra: Példa helyvektor ($\vec{a}$) bázisvektorokkal ($\vec{i}$ és $\vec{j}$) történő felírására
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

8. példa: bázisvektorok

$$\vec{a}(3; 4)$$

bázisvektorokkal: $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

$$\vec{b}(-2; -4)$$

bázisvektorokkal: $\vec{b} = -2\vec{i} + (-4)\vec{j} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$

$$\vec{a} + \vec{b}(3+(-2); 4+(-4))$$

$$\vec{a} + \vec{b}(1; 0)$$

bázisvektorokkal: $\vec{a} + \vec{b} = (3+(-2))\vec{i} + (4+(-4))\vec{j} = 1\vec{i} + 0\vec{j} = \vec{i}$

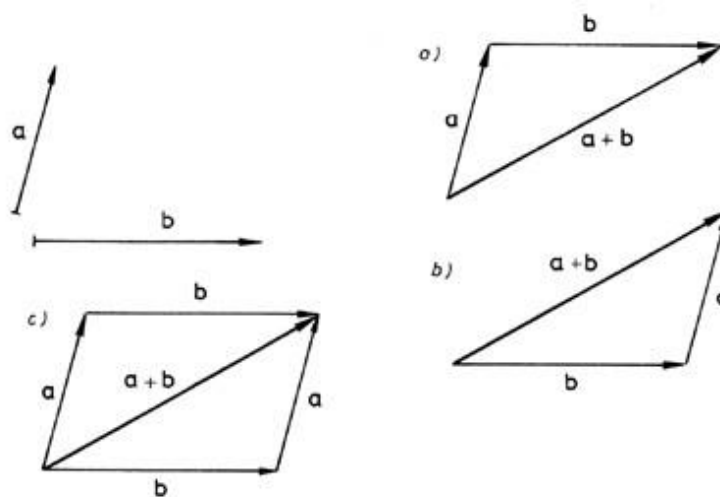
Műveletek vektorokkal

1, két vektor összege

Def.: Adott az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektor. Egy pontból kiindulva felmérjük az egyik vektort, majd ennek a végpontjába a másik vektort. A két vektor összege az $\vec{a}$ vektor, amely az első vektor kezdőpontjából a másik vektor végpontjába mutat. (Hajnal, 1987, p. 354)

Két vektor összege megszerkeszthető: a definíció alapján (75. ábra a) és b) szerkesztések), illetve paralelogramma módszerrel (75. ábra c) szerkesztés).³²

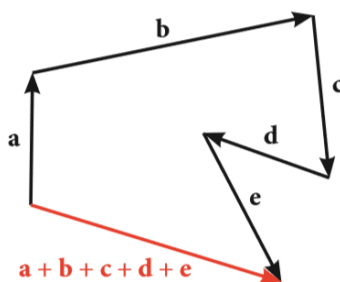
³² forrás: Hajnal, 1987



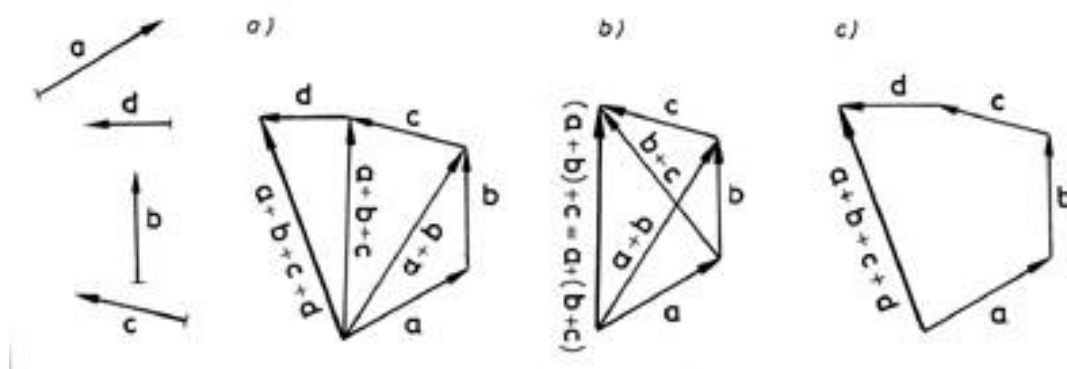
75. ábra: Két vektor összeadása: a) és b): háromszögmódszer, c): paralelogramma módszer.
 forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

2, több vektor összege

Először két vektort összegzünk, majd az összeghez hozzáadunk egy újabb vektort.³³



76. ábra: Több vektor összeadása sokszögmódszerrel
 forrás: www.nkp.hu

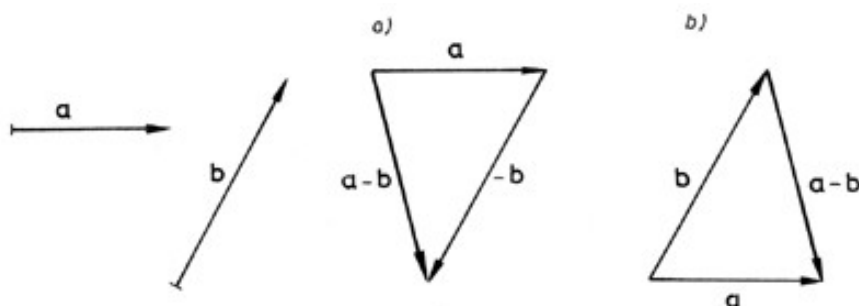


77. ábra: Több vektor összeadása. a) és b): vektorok összegének megszerkesztése külön-külön, c): sokszögmódszer
 forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

³³ forrás: Hajnal, 1987

3, két vektor különbsége

Def.: Az $a-b$ különbségén az $a+(-b)$ összeget értjük, azaz az a -hoz hozzáadjuk a b ellentettjét. (Hajnal, 1987, p. 356)

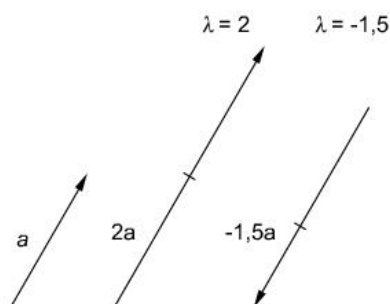


78. ábra: Vektorok kivonása
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

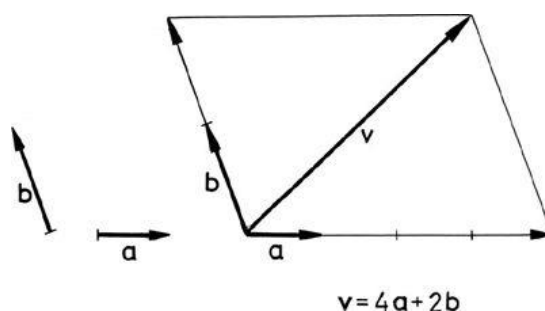
A $(-b)$ a b vektor ellentettje. Az $(a-b)$ különbségvektor tehát a közös kezdőpontból felrajzolt a és b vektorok végpontját összekötő vektor, amely a kisebbítendő vektor végpontja felé mutat.

4, vektor szorzása skalárral

Def.: a) Ha $a \neq 0$, akkor az a vektor és a λ szám szorzata olyan vektor, amelynek abszolútértéke $|\lambda| \cdot |a|$ és iránya $0 < \lambda$ esetén az a vektor iránya, $\lambda < 0$ esetén az a vektor irányával ellentétes, $\lambda=0$ esetén $\lambda \cdot a = 0$, iránya tetszőleges. b) Ha $a = 0$, akkor $\lambda \cdot a = 0$. (Hajnal, 1987, p. 358)

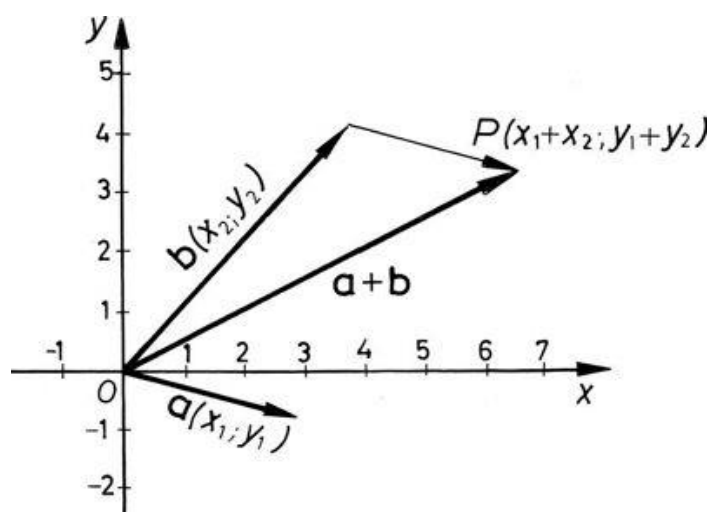


79. ábra: Vektor szorzása skalárral
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu



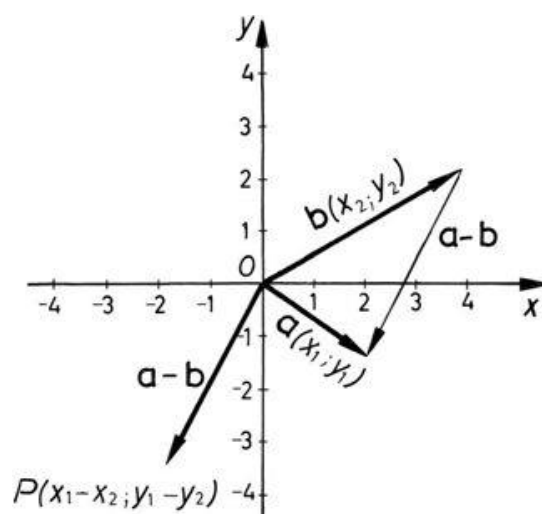
80. ábra: Vektor szorzása skalárral
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

5, két helyvektor összege



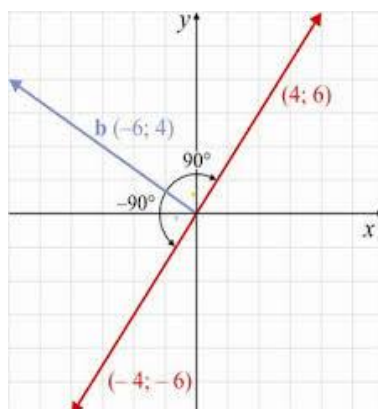
81. ábra: Két helyvektor összege
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

6, két helyvektor különbsége



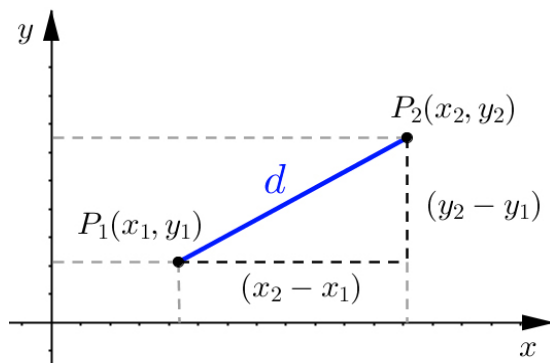
82. ábra: Két helyvektor különbsége
forrás: www.tudasbazis.sulinet.hu

7, vektorok elforgatása



83. ábra: Vektorok elforgatása
forrás: www.kooperativ.hu

- végpontokkal adott szakasz hossza



84. ábra: Adott szakasz hosszának meghatározása végpontokkal
forrás: www.mathreference.org

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$$

A P_1P_2 vektor hosszának számítása: $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

9. példa: Descartes-féle koordináta rendszer és vektorok geográfiai alkalmazásai

Descartes-féle koordinátarendszer alkalmazási területei

a, vetülettan

b, társadalomföldrajz (ide tartoznak egyrészt a *súlypont-meghatározási* és *súlypont-eltolódási* példák, melyek egyben átvezetnek bennünket a statisztikai paraméterek alkalmazásának fontosságához is – pl. súlyozott átlagok megjelenítése a térben –, másrészt pl. *népesedési* és *migrációs egyenleg* vizsgálatához is használható)

c, a talajvíz-áramlási irány meghatározása (ez átvezet bennünket a szögfüggvények használatához)

d, geológiában a dőlés és áldőlés elkülönítése

e, disztancia-vizsgálatok (különbség-értékek térbeli megjelenítése)

f, két és háromváltozós pontdiagramok (Lóki&Demeter, 2009, p. 9)

Példa –súlypontszámítás (Társadalomföldrajz) ³⁴

Ha a mintavételi pontokat egy síkbeli pontrendszerben (ez lehet az EOVS vetületi rendszer, illetve tetszőlegesen alkotott koordináta-rendszer) elhelyezzük, a települések alappontjaihoz „harmadik dimenzióként” egy-egy „súly” (tömeg) rendelhető – mely lehet a népességszám, foglalkoztatottak száma, távbeszélő fővonalak száma, összes tőke, stb. – amelyből egy súlyozott átlag számításával megkapjuk a vizsgált jelenség súlypontjának x és y koordinátáját az adott területi egységen belül (megye, statisztikai kistérség, kistáj). (Lóki&Demeter, 2009, p. 10)

Ez a módszer alkalmas **statikus** és **dinamikus** vizsgálatokra.

A statikus vizsgálatokhoz tartozik:

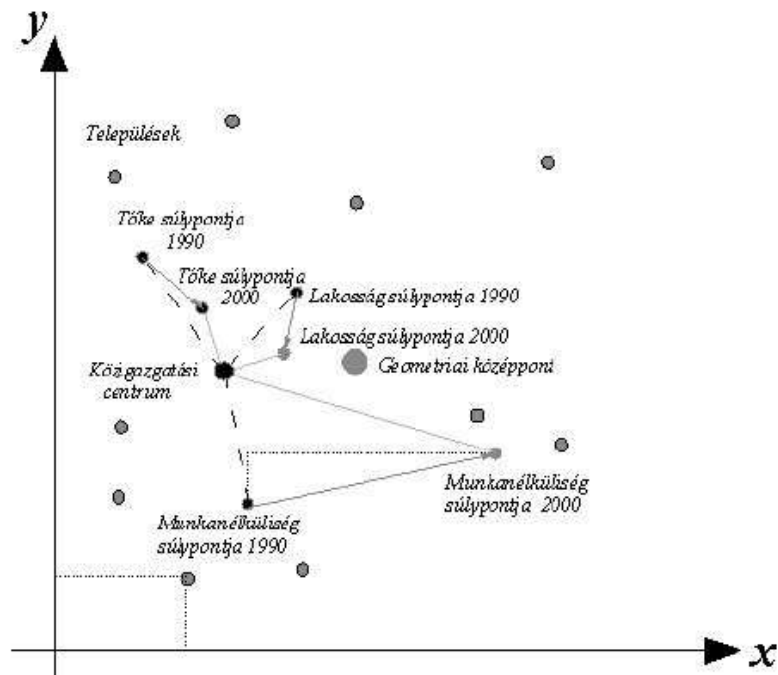
- egy változó súlypontjának összevetése a regionális/a geometriai központ/lakossági súlypont elhelyezkedésével;
- több változó súlypontjának összevetése a regionális központ (geometriai központ) helyével;
- több változó esetén a változók egymástól való távolsága (koncentrálttság).

A dinamikus vizsgálatokhoz tartozik:

- egy változó súlypontjának mozgása az idő folyamán;
- több változó súlypontjának mozgása az idő folyamán;
- a regionális vagy geometriai centrumtól való távolság módosulásának mérése (koncentráció-dekoncentráció vizsgálata).

A vizsgált jelenség – legyen az a lélekszám, a GDP, vagy a terciér szektor súlypontja, - súlypontjának távolsága a valódi vagy ideális centrumtól (geometriai középpont) meghatározható. A vizsgálat lehet statikus és dinamikus, azaz a súlypont-eltolódás irányát és nagyságát is mérhetjük, hiszen vektorok keletkeznek. (Lóki&Demeter, 2009, pp. 10-11)

³⁴ a példa forrása: Lóki&Demeter, 2009

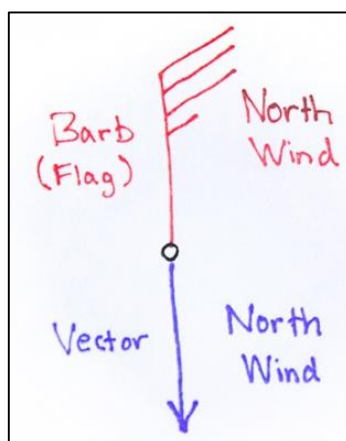


85. ábra: Súlyponteltolódás és a centrumoktól mért távolság
forrás: Lóki&Demeter, 2009

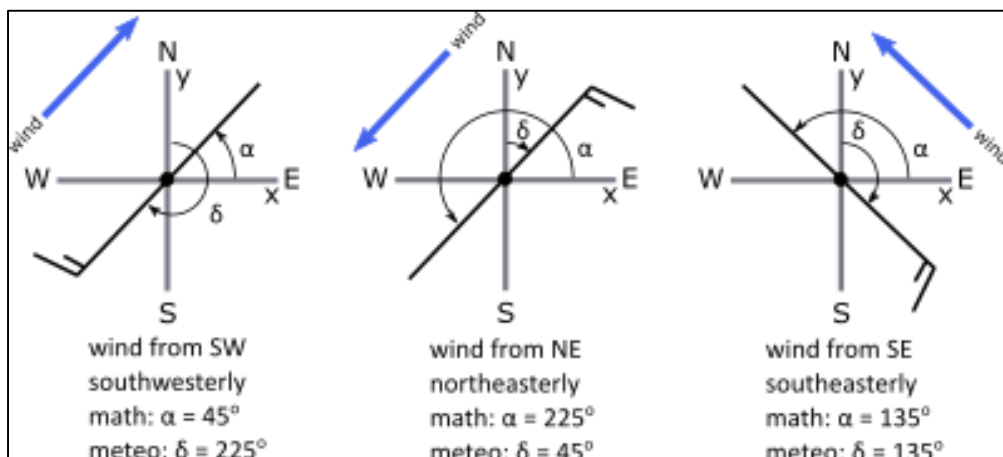
Példa – szélirány

A szél vektormennyiség: van iránya (szélirány) és nagysága (szélsebesség). A szélirány az az irány, ahonnan a szél fúj (86. ábra).

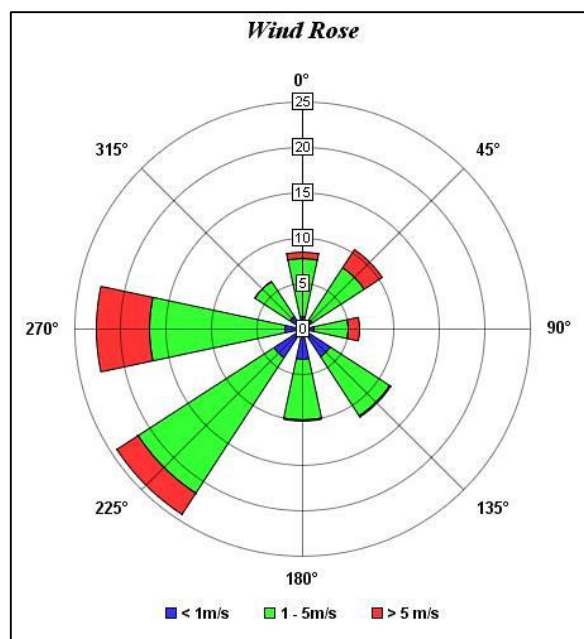
A meteorológiában az északi irány (É-i szél) a 0° , a keleti irány (K-i szél) a 90° , a déli irány (D-i szél) a 180° , a nyugati irány (Ny-i szél) pedig a 270° -nak felel meg. A meteorológiai és a matematikai szélirány közti különbséget szemlélteti a 87. ábra.



86. ábra: Szélirány (a példában északi szél) szélzászlóval (piros), illetve vektorral (kék)
forrás: www.tornado.sfsu.edu

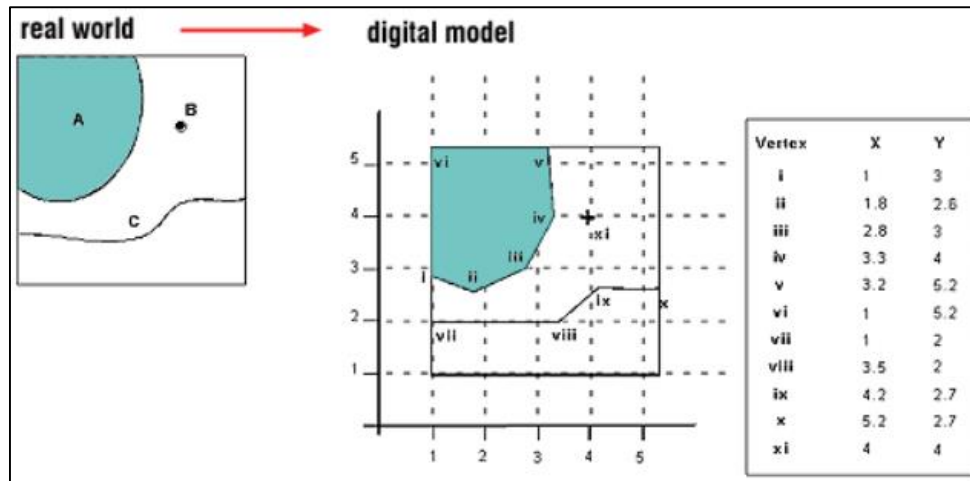


87. ábra: A matematikai és a meteorológiai szélirány közti különbség
forrás: www.e-education.psu.edu



88. ábra: Szélrózsa. A színezések az egyes szélsébség kategóriákat jelölik, míg az y tengelyen lévő számok a gyakoriságokat
forrás: www.ncu.edu.tw

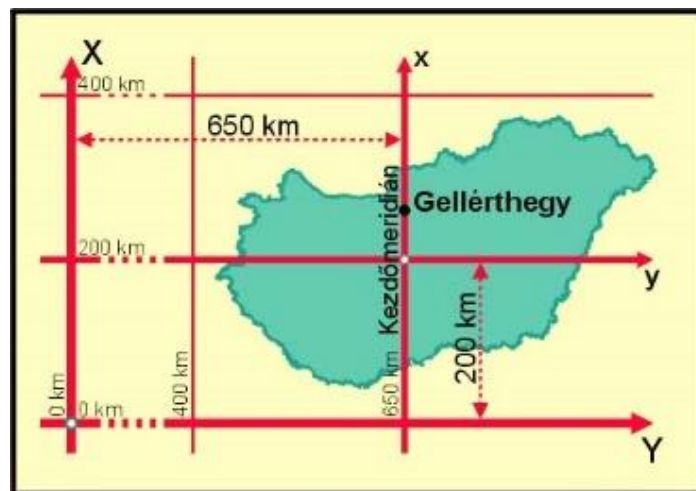
Példa – térinformatika



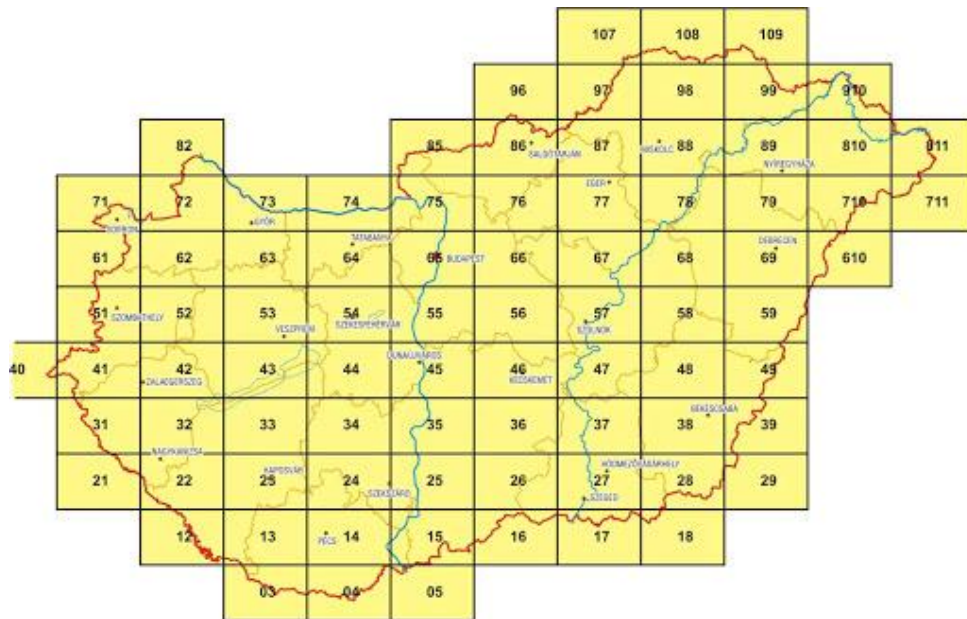
89. ábra: Vektor modell
forrás: www.geogra.uah.es

Példa – földrajzi tájékozódás

- „A földrajzi tájékozódásnál gyakran adódik olyan feladat, hogy egy adott, ismert koordinátájú pont helyét be kell jelölnünk topográfiai térképen, illetve a térkép segítségével meg kell határoznunk egy tereptárgy koordinátáit” (Lóki&Demeter, 2009 p. 8).
- „A térképtanból ismert EOTR (Egységes Országos Térkép Rendszer) térképek egy olyan derékszög koordinátarendszernek tekinthetők, amelynek kezdőpontját 200 km-re D-re, illetve 650 km-re Ny-ra tolták el a henger és a felszín érintési pontjától” (Lóki&Demeter, 2009 p. 8).
- Az EOVS vetületi rendszerben készült térképek vízszintes tengelye az „y”, a függőleges tengelye pedig az „x” jelet kapta. Ennek megfelelően a pont koordinátáinak általános jelölése $P(y, x)$. Például a $P(800\ 000, 250\ 000)$ koordinátájú pont a kezdőponttól 800 000 m-re (800 km) K-re és 250 000 m-re (250 km) É-ra helyezkedik el. (Lóki&Demeter, 2009, p. 8)



90. ábra: EOTR
forrás: www.arcanum.com



91. ábra: EOTR szelvények
forrás: www.lazarus.elte.hu

Halmazok

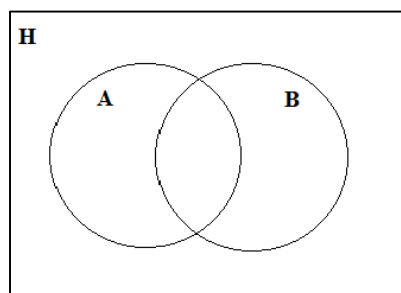
Halmazelmélet

A halmazelmélet alapjait Georg Cantor (1845-1918) német matematikus dolgozta ki a 19. század hetvenes éveiben.³⁵ 1908-ban Ernst Zermelo és Abraham Fraenkel megfogalmazta a halmazelméleti axiómarendszert.

A halmazt alapfogalomnak tekintjük. Az axiomatikus halmazelmélet szerint a halmaz bizonyos axiomatikus rögzített tulajdonságokkal rendelkező dolgok osztálya (axióma = Alaptétel, alapigazság, aminek hitelességét senki nem vonja kétségbe).

A halmazok jelölése: latin nagybetűvel ($A, B, C, \dots$), elemeinek jelölése: kisbetűvel.

Ha egy elem a halmazhoz tartozik, azt mondjuk, hogy *elem* a halmaznak.³⁶ A halmazhoz tartozás jelölése: $5 \in N$ (5 eleme az N halmaznak), halmazhoz nem tartozás jelölése: $-2 \notin N$ (-2 nem eleme az N halmaznak). *Ábrázolás:* pl. Venn-diagrammal (92. ábra).



92. ábra: Venn-diagram
forrás: saját szerkesztés

³⁵ forrás: www.arcanum.com

³⁶ forrás: Hajnal, 1987

„Két halmazt akkor és csak akkor tekintünk *egyenlőnek*, ha az egyik halmaz elemei a másik halmaz elemével azonosak” (Hajnal, 1987, p. 34).

Üres halmaznak nevezzük azt a halmazt, amelynek egy eleme sincs. Jelölése: $\emptyset$ ³⁷

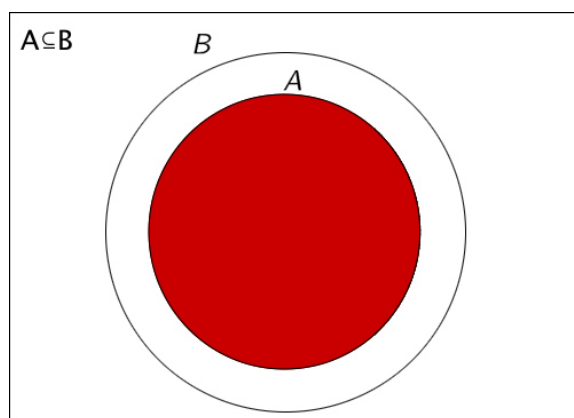
Példa üres halmazra: azon számok halmaza, amelyek kisebbek 10-nél, de nagyobbak 12-nél.

Az egyik halmaz (A) *részhalmaza* egy másiknak (B), ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme (nincs olyan eleme A-nak, ami nem eleme B-nek). Jelölése: $A \subseteq B$ ³⁸

Az üres halmaz mindennek a részhalmaza, és minden halmaz részhalmaza önmagának. ³⁹

Példa részhalmazra:

- Az egész számok halmazának részhalmaza a páros számoké.
- A páros számok halmazának részhalmaza a 10-el osztható számoké.



93. ábra: Részhalmaz (színezett rész, A részhalmaza B-nek)
forrás: www.mathreference.org

Az A halmazt a B halmaz *valódi részhalmazának* nevezzük, ha az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, de nem egyenlő vele. (Tehát létezik olyan eleme B-nek, ami nem eleme A-nak.) Jelölése: $A \subset B$ ⁴⁰

Halmazok megadása

- elemek felsorolásával;
- elemek tulajdonságának pontos leírása;
- utasítással, pl.: $B := \{x | x = 2n, n = 1, 2, 3, 4\}$ ahol x a halmaz egy általános elemének jele.

Az utasítás alapján eldönthető bármely elemről, hogy hozzátartozik-e a halmazhoz vagy sem.

³⁷ forrás: Hajnal, 1987

³⁸ forrás: Hajnal, 1987

³⁹ forrás: Hajnal, 1987

⁴⁰ forrás: Hajnal, 1987

Példa: $x = 2 \cdot n$ egy speciális tulajdonság, ami alapján a halmaz elemeit kiválasztjuk

Példa halmazokra:

- 9-nél kisebb pozitív egész számok halmaza
- egy osztályban tanuló diákok halmaza

Halmazműveletek ⁴¹

A halmazművelet tulajdonképpen halmazokhoz halmaz hozzárendelése, az elemeik közötti kapcsolatok megadásával. „Bizonyos feltételeknek megfelelő halmazt a halmazok között végzett műveletekkel keressük meg” (Hajnal, 1987, p. 43).

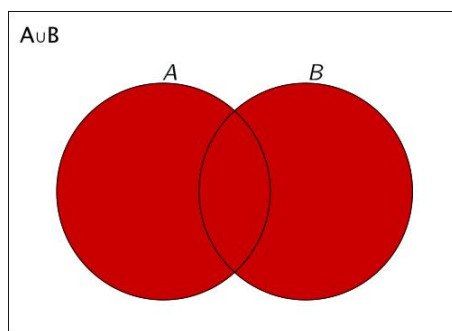
Egyesítés (unió): Adott az A és a B halmaz. Egyesítésük, a C halmaz mindazokat az elemeket tartalmazza, amelyek vagy az A-hoz, vagy a B-hez, vagy mindkettőhöz tartoznak.

Def.: „Két halmaz uniójának (egyesítésének, összegének) nevezzük azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek a két halmaz közül legalább az egyiknek elemei” (Hajnal, 1987, p. 43).

Jelölése: $A \cup B = C$, vagy: $A+B = C$

$A \cup B = B \cup A$ és $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$

Példa: A páros számok halmazának és a páratlan számok halmazának uniója az egész számok halmaza.



94. ábra: Halmazok uniója (színezett rész)
forrás: www.mathreference.org

Közös rész (metszet): Az adott A és B halmazokhoz azt a C halmazt rendeljük, amelynek elemei A-hoz is és B-hez is tartoznak.

Def.: „Két halmaz metszetének (közös részének, szorzatának) nevezzük azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek mindkét halmaznak az elemei” (Hajnal, 1987, p. 45).

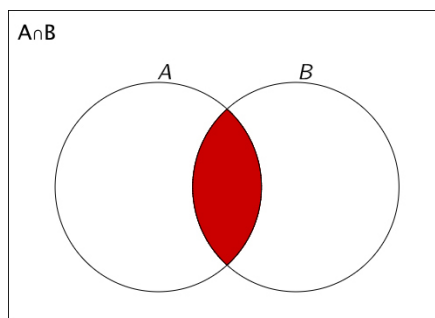
Jelölése: $A \cap B = C$ vagy $A \cdot B = C$

$A \cap B = B \cap A$ és $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

⁴¹ forrás: Hajnal, 1987

Előfordul, hogy a két halmaznak nincs közös eleme. A halmazok ez esetben *diszjunktak*.

Példa: A 15-nél nagyobb számok halmazának és a 30-nál kisebb számok halmazának metszete a 15 és 30 közé eső számok halmaza.



95. ábra: Halmazok metszete (színezett rész)
forrás: www.mathreference.org

Különbségképzés

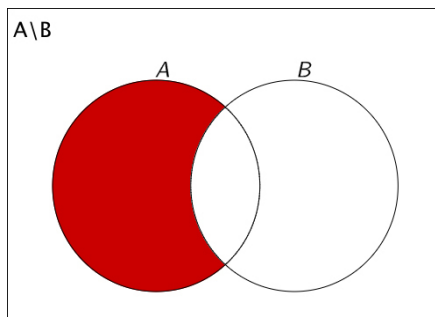
Def.: „Az A és B halmaz (ebben a sorrendben tekintett) különbségének nevezzük azoknak az elemeknek a halmazát, amelyek elemei az A halmaznak és nem elemei a B halmaznak” (Hajnal, 1987, p. 47).

Jelölése: $A \setminus B$

$A \setminus B$: A és B különbsége azon elemek halmaza, melyek elemei A-nak, de nem elemei B-nek.

$B \setminus A$: B és A különbsége azon elemek halmaza, melyek elemei B-nek, de nem elemei A-nak.

$A \setminus B \neq B \setminus A$



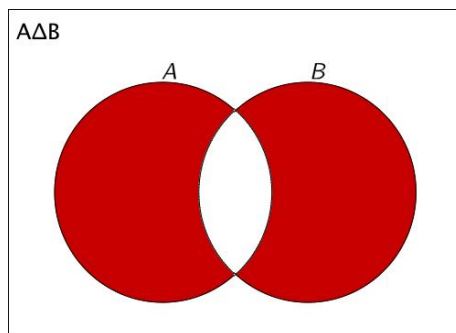
96. ábra: Halmazok különbsége (a színezett rész az A különbség B)
forrás: www.mathreference.org

Szimmetrikus differencia

Az A különbség B és a B különbség A műveletek uniójával kapjuk („kizáró vagy”).

Def.: „Az A és B halmaz szimmetrikus differenciáján értjük az $(A \setminus B \cup B \setminus A)$ halmazt” (Hajnal, 1987, p. 48).

Jelölése: $A \Delta B$ vagy $A \circ B$



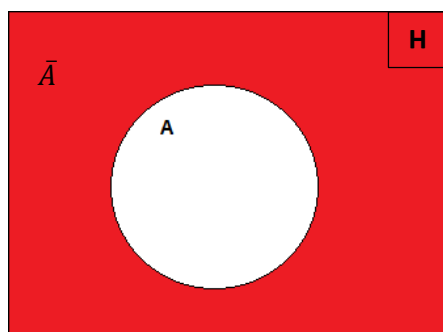
97. ábra: Szimmetrikus differencia (színezett rész)
forrás: www.mathreference.org

Komplementer halmaz: ha $A \subset B$, akkor az A kiegészítésén, más szóval *komplementeren* értjük a B halmaz összes, A-hoz nem tartozó elemét.

Def.: „Egy H nem üres halmaznak legyen egy részhalmaza az A halmaz. Az A halmaz H-ra vonatkozó komplementerének nevezzük a $H \setminus A$ halmazt” (Hajnal, 1987, p. 49).

Komplementer képzésnél azt a B halmazt, amire a kiegészítés történik, általában alaphalmaznak nevezzük és H-val jelöljük. Az A halmaz komplementere H halmaz A-n kívüli része.

Jelölése: $\bar{A}$



98. ábra: Az A halmaz komplementere a színezett rész ($\bar{A}$)
forrás: saját szerkesztés

További azonosságok:

$$A \cup \bar{A} = H$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

De Morgan törvények:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Halmazok számossága: Az $|A|$ jelölés az A halmaz elemeinek számát jelenti.

Statisztikai alapok

Mintavétel ⁴²

- Egy vizsgálandó jelenség esetén – az esetek többségében – lehetetlen és szükségtelen minden adatot összegyűjteni.
 - Példa: népszámlálást nem lehet csak azért elrendelni, mert szükség van valamilyen adatra a lakosságot tekintve
 - A teljes sokaság vizsgálata helyett mintavételi csoportokat jelölnek ki (random mintavétel)
 - Példa: a népesség átlagos testmagasságának meghatározása
 - Cél: a népességre vett középérték (μ – várható érték) meghatározása
 - Ha sikeres volt a mintacsoport kiválasztása, akkor a mintára számolt $\bar{x}$ átlagos testmagasság jól becsli a népesség egészére vonatkozó átlagos testmagasságot (μ)
- Def.: Az adatsokaságok olyan statisztikai adathalmazok, amelyekben az adatok a számok (nem valódi halmaz, mert egyes elemek többször is előfordulhatnak).
- Az ilyen adatsokaságokat statisztikai mutatókkal jellemezhetjük.
- A következő tapasztalati (kísérleti) jellemzők az elméleti mennyiségek (pl. várható érték, ferdeség, korrelációs együttható stb.) *becslései*.

Leíró statisztika			
Gyakoriságok	Középértékek	Szóródások	Korreláció
Abszolút gyakoriság	számtani közép (átlag)	Szóródási terjedelem	Korreláció számítás
%-os (relatív) gyakoriság	Módusz	Interkvartilis félterjedelem	
Kummulatív gyakoriság	Medián	Átlagos eltérés	
Kvartilisek		Variancia	
		Szórás	
		Relatív szórás	

99. ábra: Leíró statisztikai mutatószámok
forrás: www.srpszkk.hu

⁴² forrás: Crilly, 2011

1, Középértékek (átlagok)

Az azonos fajta adatok tömegének számszerű jellemzője.

- számított
 - számtani
 - mértani
 - harmonikus
 - négyzetes
- helyzeti
 - módusz
 - medián

Számtani közép (számtani átlag) ⁴³

- Véges sok szám átlaga (számtani közepe) a számok összege osztva a számok darabszámával (n).

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Súlyozott számtani átlag ⁴⁴

- Ha véges sok szám között egyenlők is vannak, és az átlag kiszámításánál szorzással írjuk fel az egyenlő számok összegét, vagyis minden számot akkora súllyal vesszünk figyelembe, ahányszor előfordul, akkor e számok súlyozott átlagát (súlyozott számtani közepét) írtuk fel.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

ahol f_i a súlytényezők. $\sum_{i=1}^n f_i = f_1 + f_2 + \dots + f_n$

Módusz

- „A módusz azon érték, ahol a sűrűségfüggvény lokálisan felveszi a maximumát (akár több maximum is lehetséges). Tehát a módusz a nagyobb gyakorisággal előforduló adatokkal egyezik meg. Ha csak egy maximum van, akkor a módusz a legnagyobb gyakorisággal

⁴³ forrás: Geresdi&Bugya, 2005

⁴⁴ forrás: Geresdi&Bugya, 2005

előforduló adattal egyenlő. *Fontos: a módusz nem feltétlenül egyezik meg az átlaggal, azaz nem mindig a leggyakoribb érték az átlagos*” (Geresdi&Bugya, 2005, pp. 22-23).

Medián ⁴⁵

- „Medián alatt azt az értéket (x_m) értjük, amelynél kisebb és nagyobb adatok száma megegyezik, azaz ahol az eloszlásfüggvény értéke pontosan 0,5-el egyenlő: $F(x_m) = \frac{1}{2}$ ” (Geresdi&Bugya, 2005, p. 22).
- ha n páratlan, akkor: $x_m = x_{\frac{n+1}{2}}$
- ha n páros, akkor: $x_m = \frac{x_{\frac{n}{2}+1} + x_{\frac{n}{2}}}{2}$
- Vannak olyan esetek, amikor a medián jobban jellemzi az adatsort, mint az átlag vagy a módusz.
- Példa:
 - ha n páratlan: 1, 3, 3, 6, 7, 8, 9 ($n = 7$), ekkor a medián a középső érték, tehát 6.
 - ha n páros: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 ($n = 8$), ekkor a medián a középső két érték számtani átlaga, tehát $(4+5)/2 = 4,5$.

2, Szóródási mérőszámok

Arról adnak információt, hogy az adatok hogyan helyezkednek el a középértékek körül.

- maximum, minimum
- terjedelem
- interkvartilis terjedelem
- átlagos abszolút eltérés
- szórás
- variancia

• Terjedelem

- Def.: Egy véges számsokaság legnagyobb és legkisebb elemének különbsége. ⁴⁶

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

- Átlagos abszolút eltérés (d): az egyes értékek átlagosan mennyivel térnek el az átlagtól. Lehet súlyozott is. ⁴⁷

⁴⁵ forrás: Geresdi&Bugya, 2005

⁴⁶ forrás: www.agr.unideb.hu

⁴⁷ forrás: www.agr.unideb.hu

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{n}$$

- Szórás (standard eltérés): az adatok eltérését méri az átlagtól.
 - Mértékegysége megegyezik az adatok mértékegységével.
 - Mindig pozitív szám.

- (tapasztalati) szórás:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

- korrigált empirikus (tapasztalati) szórás: ⁴⁸

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Az előbbi képletben szereplő tagok részletesen: $s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$

- Relatív szórás: arányszám. Kifejezi, hogy az egyes értékek átlagosan hány %-al térnek el az átlagtól. A képletben σ a szórás, az $\bar{x}$ a számtani átlag. ⁴⁹

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

- Variancia (szórásnégyzet): a szórás négyzete. Az átlagtól vett átlagos négyzetes eltérés. ⁵⁰

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

⁴⁸ forrás: Geresdi&Bugya, 2005

⁴⁹ forrás: www.tankonyvtar.hu

⁵⁰ forrás: www.srpszkk.hu

3, Kvantilisok (osztópontok)

Ha a sorba rendezett adatokat 2, 3, 4...stb részekre osztjuk, akkor az osztópontokat a megfelelő kvantilisként fogjuk elnevezni. Ezek jellemzője, hogy adott osztópontnál az adatok bizonyos hányada lesz kisebb. ⁵¹

Tehát a p. kvantilis az x változó azon értéke, amelynél kisebb adatok hányada p.

0,1-es kvantilis, 0,25-ös kvantilis...0,9-es kvantilis. ⁵²

- *Kvartilisek*: az adatsokaságot 4 egyenlő részre osztjuk. ⁵³

Az *alsó kvantilis* a legkisebb érték és a medián között elhelyezkedő adat számértéke a rendezett mintában.

$$n_{Q_1} = \frac{n + 1}{4}$$

A *felső kvantilis* a medián és a legnagyobb érték között van középen.

$$n_{Q_3} = \frac{3 \cdot (n + 1)}{4}$$

Nevezetes kvantilis érték: *medián*, ami a 2. (vagy középső) kvantilis

- *Percentilisek*: Az n-edik percentilisnél az adatok n%-a kisebb. ⁵⁴

n: 0 és 100 közötti egész szám.

50. percentilis: medián

példa: Az 5. percentilisnél az adatok 5%-a kisebb, 95%-a nagyobb.

Példa: 0,25-ös kvantilis = 1. kvantilis (Q_1) = 25. percentilis ⁵⁵

- *Interkvantilis terjedelem*: az alsó és a felső kvantilis közti különbség. (középső 50% terjedelme) ⁵⁶

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

- *Kvantilis eltérés*: ⁵⁷

⁵¹ forrás: www.tankonyvtar.hu

⁵² forrás: www.kfki.hu

⁵³ forrás: www.tankonyvtar.hu

⁵⁴ forrás: www.xenia.sote.hu

⁵⁵ forrás: www.kfki.hu

⁵⁶ forrás: www.tankonyvtar.hu

⁵⁷ forrás: www.agr.unideb.hu

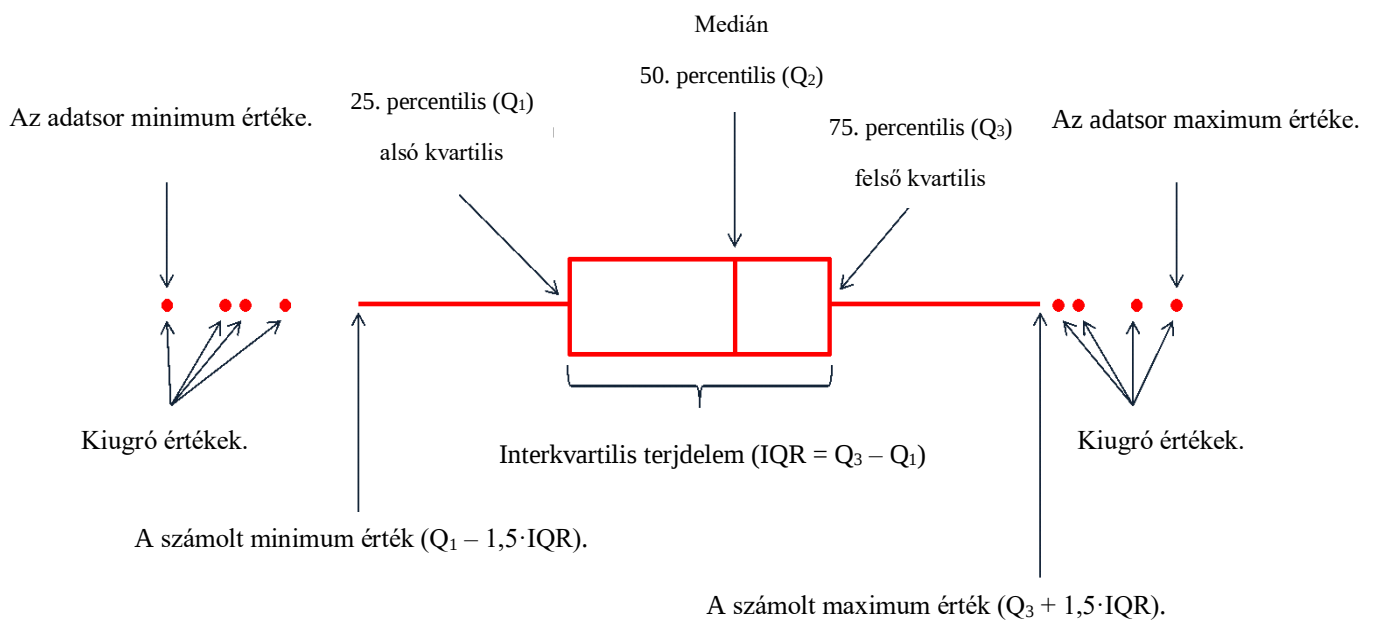
$$Q_e = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

4, Box plot

Eloszlások elhelyezkedésének és szórásának jellemzésére szolgál. A box (doboz) az alsó és felső kvartilis által határolt. Felhasználható az asszimetria szemléltetésére.

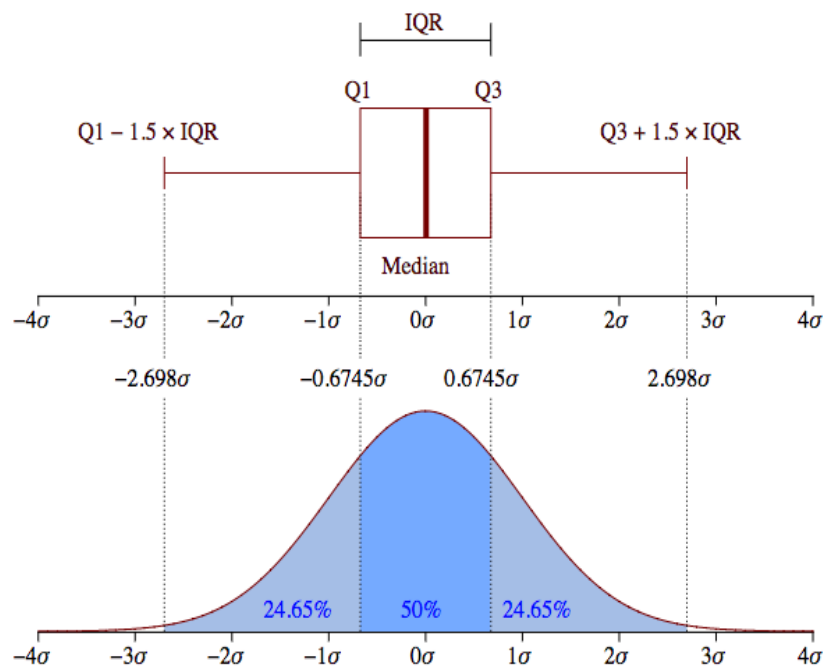
Kiugró értékek: A minta olyan értékei, amelyek a többihez képest túl kicsik, vagy túl nagyok.

számításuk: $x_i < Q_1 - 1,5 \cdot IQR$ és $x_i > Q_3 + 1,5 \cdot IQR$



100. ábra: Box plot (dobozdiagram)

forrás: www.leansigmacorporation.com, a magyar feliratok: saját szerkesztés



101. ábra: Box plot normál eloszlás esetén
forrás: www.researchgate.net

5. Osztályokba sorolt adatok

Számtani átlag számítása: ⁵⁸

- x_a, y_a, n_a – az osztályköz alsó határa
- x_f, y_f, n_f – az osztályköz felső határa
- N – a sokaság elemszáma

$$\bar{x} = \frac{\frac{x_a + x_f}{2} + \frac{y_a + y_f}{2} + \dots + \frac{n_a + n_f}{2}}{N}$$

Módusz számítása: ⁵⁹

- m_o : a modális osztály alsó határának az értéke
- f_1 : a modális osztály gyakoriságának és a vele alulról szomszédos osztály gyakoriságának a különbsége
- f_2 : a modális osztály gyakoriságának és a vele felülről szomszédos osztály gyakoriságának a különbsége
- h : a modális osztály szélessége

⁵⁸ forrás: Geresdi&Bugya, 2005

⁵⁹ forrás: Geresdi&Bugya, 2005

$$M_o = m_o + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \cdot h$$

6, Abszolút változás

Valamely időszak (x_n) és a megelőző időszak (x_{n-1}) adata közötti különbség. ⁶⁰

$$d_1 = x_1 - x_0, d_2 = x_2 - x_1, \dots d_n = x_n - x_{n-1}$$

- Átlagos abszolút változás: az abszolút változás adatainak számtani átlagaként kell kiszámolni.

Kiszámítható az első és az utolsó értékből is: $\bar{d} = \frac{x_n - x_0}{n}$

7, Relatív változás

Valamely időszak adatának a megelőző időszak adatához való aránya (ún. láncviszonyszám). ⁶¹

$$l_1 = \frac{x_1}{x_0}, l_2 = \frac{x_2}{x_1}, \dots l_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$$

- Átlagos relatív változás: a láncviszonyszámok mértani átlagaként kell kiszámolni.

Kiszámítható az első és az utolsó értékből is: $\bar{l} = \sqrt[n]{\frac{x_n}{x_0}}$

8, Adatsorok általános jellemzésének paraméterei

- Nyers adatok ábrázolása – információt ad arról, hogy az adatok pl. milyen időbeli változékonyságúak
- Számtani átlag
- Szórás
- Terjedelem
- Medián
- Módusz
- Elemszám (n)
- Empirikus sűrűségfüggvény (hisztogram)
- Empirikus eloszlásfüggvény

⁶⁰ forrás: Abonyiné, 1999

⁶¹ forrás: Abonyiné, 1999

9, Előnyök, hátrányok

- Számítási átlag
 - Előny: könnyen kiszámítható, eltünteti a különbségeket
 - Hátrány: nem tárja fel az adatsort belső szerkezetét; egy szélső érték nagyon eltolhatja az átlagot; nem kapunk információt róla, hogy az adatok milyen mértékben ingadoznak
 - Példa: Ha az adatsorunk tartalmaz kiugró adatot. pl. 1,2,3,3,3,25,125, átlag = 23,14 ⁶²
 - Példa: Ha a cégnél évi 4,5 milliós a közepes (éves) fizetés...
 - nem lehet tudni, hogy minden dolgozó ennyit kap, vagy a cégvezető pl. 20 milliós fizetése tolja el az átlagot a nagyobb értékek felé ⁶³
 - eltérő terjedelmű adatsorok esetén is kaphatjuk ugyanazt az átlagot (lásd táblázat):

	adatsor 1	adatsor 2	adatsor 3	adatsor 4
érték 1:	9	19	10	20
érték 2:	11	1	10	0
érték 1 és érték 2 számítási átlaga:	10	10	10	10

- Terjedelem
 - Előny: egyszerűen számolható; megadja, hogy a sor értékei milyen értékek között mozognak.
 - Hátrány: nincs tekintettel a szélső értékek közötti értékekre, illetve a súlyokra.
- Medián
 - Előny és hátrány is: Alig érzékeny a kiugróan kicsi vagy nagy értékekre.
- Módusz
 - Előny: megtudható, hogy melyik a leggyakoribb érték (pl. fizetések alakulása egy cégnél).

10, Empirikus eloszlásfüggvény készítése

- „Egy adott x_a értékhez tartozó $F(x_a)$ függvényérték azt fejezi ki, hogy milyen valószínűséggel fordulnak elő az x_a -nál kisebb, vagy azzal egyenlő kísérleti eredmények, azaz:” (Geresdi&Bugya, 2005, p. 21)

$$F(x_a) = P(x \leq x_a)$$

⁶² forrás: Palmer, 2014

⁶³ forrás: Crilly, 2011

A készítés menete: ⁶⁴

- a sorba rendezett adatokból meghatározzuk azoknak az elemeknek a számát, amelyekre teljesül, hogy $x \leq x_a$
- függvényértékek kiszámítása adott x_a helyen (relatív gyakorisággal közelítjük)

$$F(x_a) = \frac{k}{n}$$

- n az összes adat, k azon adatok száma, amelyekre teljesül, hogy $x \leq x_a$

Az empirikus eloszlásfüggvény segítségével könnyen leolvasható:

- a medián (az y tengelyen a 0,5 értékhez tartozó x érték), amely megmutatja, hogy melyik x értéknél lesz kisebb vagy egyenlő az adatok 50%-a.
- tetszőleges relatív gyakorisághoz (k/n) tartozó x érték, amely megmutatja, hogy az adott x értéknél kisebb vagy egyenlő értékek mekkora valószínűséggel fordulnak elő.

11, Empirikus sűrűségfüggvény készítése

- Egy adott $[x_1; x_2]$ intervallumba esés valószínűségét az $f(x)$ függvényérték fejezi ki, azaz

$$f(x) = P(x_1 \leq x < x_2)$$

„A görbe alatti terület az x_1 és x_2 pontok között annak a valószínűségét fejezi ki, hogy a kísérlet eredménye az x_1 és x_2 értékek közé esik” (Geresdi&Bugya, 2005, p. 22).

A készítés menete: ⁶⁵

- adatok sorba rendezése (EXCEL függvény használata esetén nem szükséges)
- intervallumok felvétele, majd meghatározzuk, hogy az adott intervallumba hány darab adat tartozik
- a sűrűségfüggvény értékeinek számítása minden intervallumra:

$$f(x_i) = \frac{k_i}{n \cdot d_i}$$

n az összes elem darabszáma, k_i azoknak az elemeknek a darabszáma, amelyekre teljesül, hogy az adott intervallumba esnek és d_i az adott intervallum szélessége.

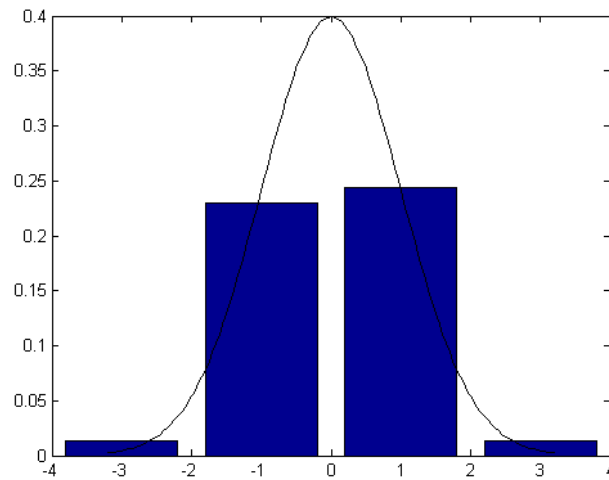
⁶⁴ forrás: Geresdi&Bugya, 2005

⁶⁵ forrás: Geresdi&Bugya, 2005

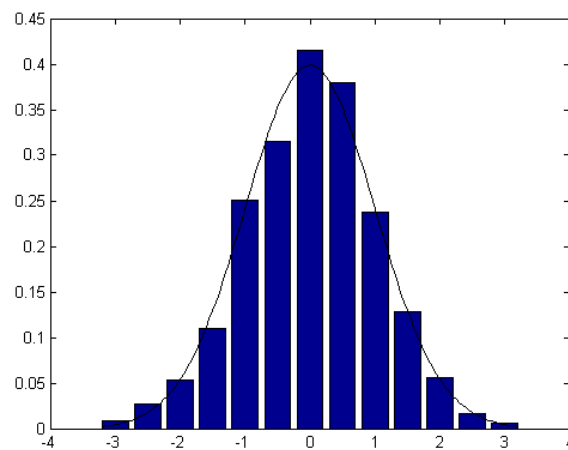
Az empirikus sűrűségfüggvény segítségével könnyen leolvasható:

- a módusz (ha van), amely a legnagyobb relatív gyakorisággal (oszlopmagassággal) rendelkező intervallum. Egy adatsorban több módusz is előfordulhat;
- a relatív gyakorisági hisztogram segítségével, egyenlő intervallumszélességek esetén az egyes intervallumokba esés valószínűsége.

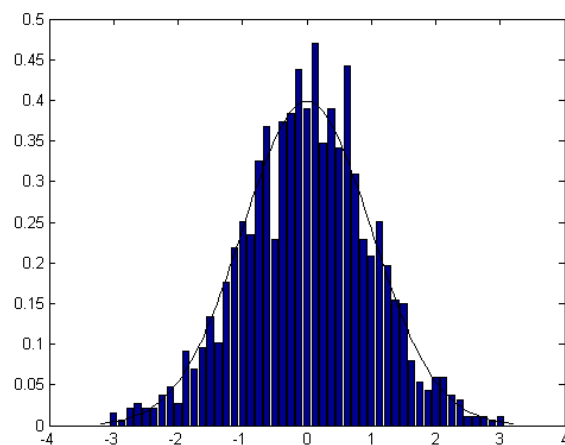
Példák



102. ábra: *Durva beosztású hisztogram+elméleti sűrűségfüggvény*
forrás: www.tankonyvtar.hu



103. ábra: *Megfelelő beosztású hisztogram + elméleti sűrűségfüggvény*
forrás: www.tankonyvtar.hu



104. ábra: Túl sűrű beosztású hisztogram + elméleti sűrűségfüggvény
forrás: www.tankonyvtar.hu

12, Hisztogram intervallumainak száma és szélessége

Általánosan:

- *Intervallumok száma:* a mintaszám összes elemszámának négyzetgyöke

Pl. ha 100 adat van, akkor ennek négyzetgyöke 10, tehát 10 db intervallum javasolt

- *Intervallumok szélessége:* $(\max - \min) / \text{intervallumok száma}$

Pl. $\max = 150$, $\min = 20$, int. száma = 10, így az intervallumok szélessége: $(150 - 20) / 10 = 130 / 10 = 13$

Az intervallumok számára vonatkozó ajánlás a 2. táblázatban található.

2. táblázat: A hisztogram intervallumainak száma különböző adatmennyiség esetén
forrás: www.qimacros.com

Adatok száma	Intervallumok száma
20-50	6
51-100	7
101-200	8
201-500	9
501-1000	10
1000+	11-20

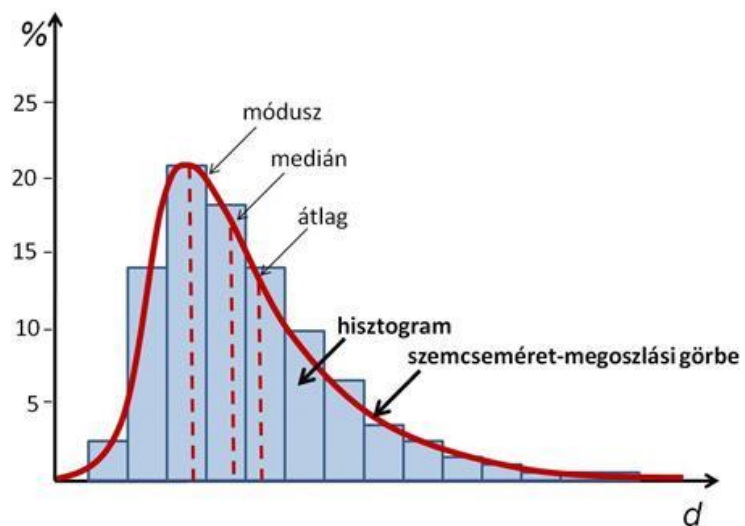
10. példa – empirikus sűrűségfüggvény (talajtani alkalmazás)

- A szemcseméret meghatározásának módszere a talaj textúrájától függ. Homokos talajokra és üledékekre elég a szitasor használata rázógéppel.

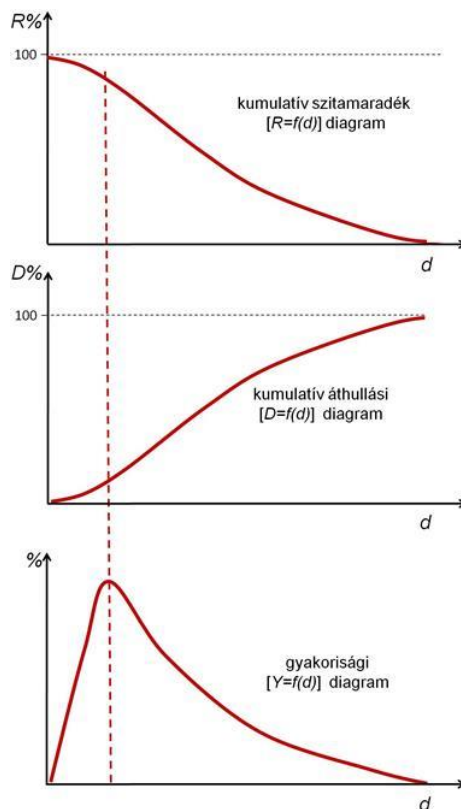
- Legfelül helyezkedik el a legnagyobb nyílású szita, míg a szitasorban lefelé haladva egyre kisebb lyukbőségűek a sziták.
- A száraz szitálás méret szerint osztályoz, nem ad felvilágosítást a morzsák vízzel szembeni magatartásáról.



105. ábra: Különböző lyukátmérőjű sziták
forrás: www.tankonyvtar.hu



106. ábra: Relatív gyakoriság hisztogram és szemcseméret megoszlási görbe. forrás: www.tankonyvtar.hu



107. ábra: Fentről lefelé: Kumulatív szitamaradék diagram, kumulatív áthullási diagram és gyakoriság diagram.
forrás: www.tankonyvtar.hu

13, Változók közötti kapcsolat

1, Korreláció

A **korreláció** nem mutatja meg a két változó közötti ok-okozati viszonyt, csak arra enged következtetni, hogy van-e, vagy nincs kapcsolat a változóink között.

Legyen a két valószínűségi változónk x és y . Egy kapcsolatot az alábbiak szerint jellemezhetünk:

Ha nincs kapcsolat a két változónk (x, y) között, akkor **korrelálatlan**-nak nevezzük a kapcsolatot. Tehát x nem befolyásolja y értékét (vagyis y értéke független x értékétől). **Sztokasztikus kapcsolat**ról beszélünk, ha a két változó között egyértelmű, függvényszerű kapcsolatot nem lehet megállapítani, ugyanakkor (x, y) adatpárok halmaza egy adott típusú – lineáris, vagy görbe vonalú – függvénnyel közelíthető. **Függvényszerű a kapcsolat**, ha minden egyes x értékhez egy-egy y értéket tudunk rendelni.

Korreláció számítás: „a tényező és az eredményváltozó közötti kapcsolat erősségét, intenzitását és irányát fejezi ki” (Abonyiné, 1999, p. 106). A grafikus ábrázolásnál az x tengelyre az ok, vagyis a tényezőváltozó kerül (független változó), az y tengelyre az okozat, vagyis az eredményváltozó kerül (függő változó).

A korrelációs együttható (r) értéke -1 és $+1$ közé esik. A kapcsolat iránya azt mutatja meg, hogy az egyik változó értékeinek növekedésével a másik változó értékei csökkennek (negatív irányú) vagy nőnek (pozitív irányú). A determinációs együttható (r^2) 0 és 1 közé esik. Azt fejezi ki, hogy „a tényezőváltozó hány %-ban befolyásolja az eredményváltozó (y) alakulását” (Abonyiné, 1999, p. 107).

2, Regresszió számítás

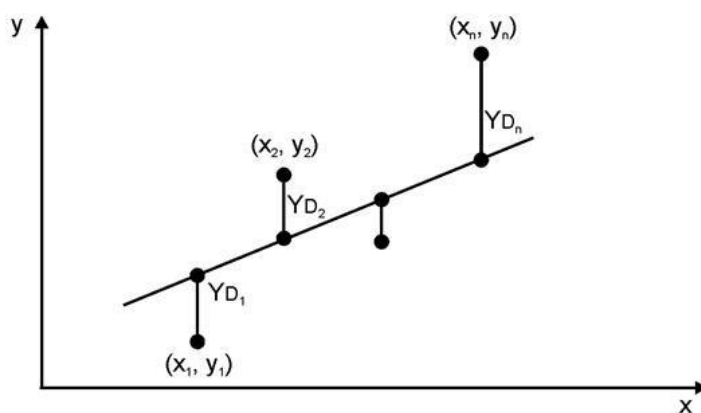
Az összefüggésekben lévő tendenciát vizsgálja, a kapcsolat természetét pedig valamilyen függvénnyel írja le.

„Valamely mért x és y tulajdonság közötti törvényszerűséget fejezzük ki. E törvényszerűség létezését a korrelációs együttható mutatja (legalábbis lineáris esetben)” (Geiger, 2012, p. 93). Ha szoros a korrelációs kapcsolat, akkor a regressziós függvény alkalmazható az összefüggés becslésére.

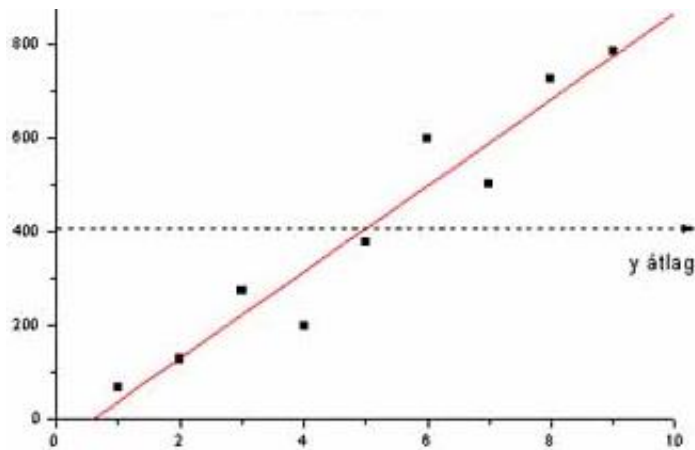
A kapcsolat jellege a pontpárokat „kiegyenlítő” görbe (regresszió) függvényalakja. Ilyen értelemben beszélhetünk lineáris, exponenciális stb. kapcsolatokról. A regresszió tulajdonképpen „az a „kiegyenlítő” görbe, amely a mért x és y értékeket a „legnagyobb valószínűséggel” kapcsolja össze” (Geiger, 2012, p. 93).

Lineáris regresszió ált. alakja: $y = a \cdot x + b$

A regresszió jelentősége: „ha a regressziós egyenletbe behelyettesítjük az x független változó (=tényező változó) bármely olyan értékét, amely a mért minta minimális és maximális x értéke közé esik, akkor kiszámíthatjuk, becsülhetjük a függő változó (y , eredményváltozó) legvalószínűbb értékét” (Geiger, 2012, p. 94). Becslésre csak a mért x értékek minimuma és maximuma közötti sávban alkalmazható a regresszió. A regressziós kapcsolat nem alkalmazható extrapolációra. Az „adott x -ekhez tartozó mért (valódi) és becsült (a regresszióból származó) értékek különbsége a hiba vagy rezidum (maradék)” (Geiger, 2012, p. 95).



108. ábra: Lineáris regresszió
forrás: www.tankonyvtar.hu



109. ábra: Lineáris regresszió
forrás: www.kfki.hu

11. példa – korrelációs kapcsolat

- Tenyésztésidőszakban lehullott csapadék mennyisége és a termésátlag között
- Tenyésztésidőszaki napsütéses órák száma és a szőlő cukortartalma között
- Háztartásokban az egy főre jutó jövedelem és az egy főre jutó fogyasztás között
- A termék ára és a termék minősége között
- A munkában eltöltött idő és a kereset nagysága között
- Az iskolai végzettség és a jövedelem között ⁶⁶

14. Mozgó átlag („moving average”)

Előnyös olyan adatsorok esetén, ahol nagy a fluktuáció. Segítségével jobban látható az adatokban lévő tendencia.

- Ha a tagok száma páratlan:
$$\hat{y}_t = \frac{y_{t-k} + \dots + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \dots + y_{t+k}}{2k+1}$$

pl. 3 napos mozgó átlag esetén: $2k+1 = 3$, tehát $k = 1$

A legelső tag, ahonnan az átlagolást kezdeni lehet: $t = 2$ (y_2)

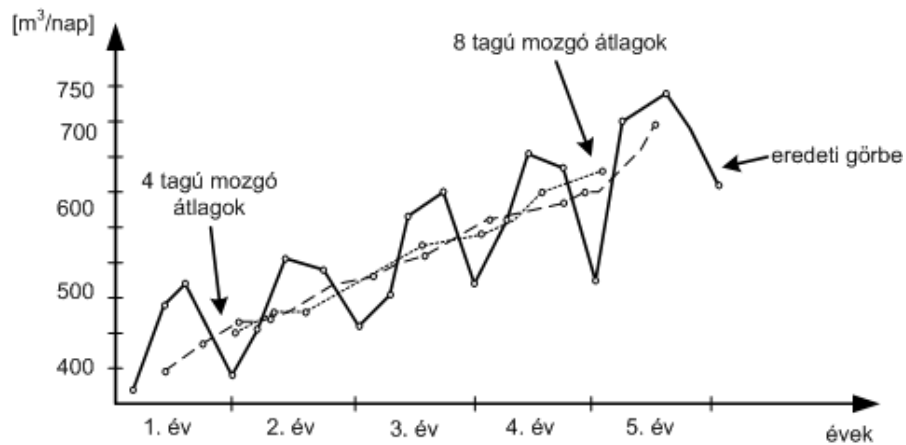
- Ha a tagok száma páros:
$$\hat{y}_t = \frac{\frac{y_{t-k}}{2} + \dots + y_{t-1} + y_t + y_{t+1} + \dots + \frac{y_{t+k}}{2}}{2k}$$

pl. 4 napos mozgó átlag esetén: $2k = 4$, tehát $k = 2$

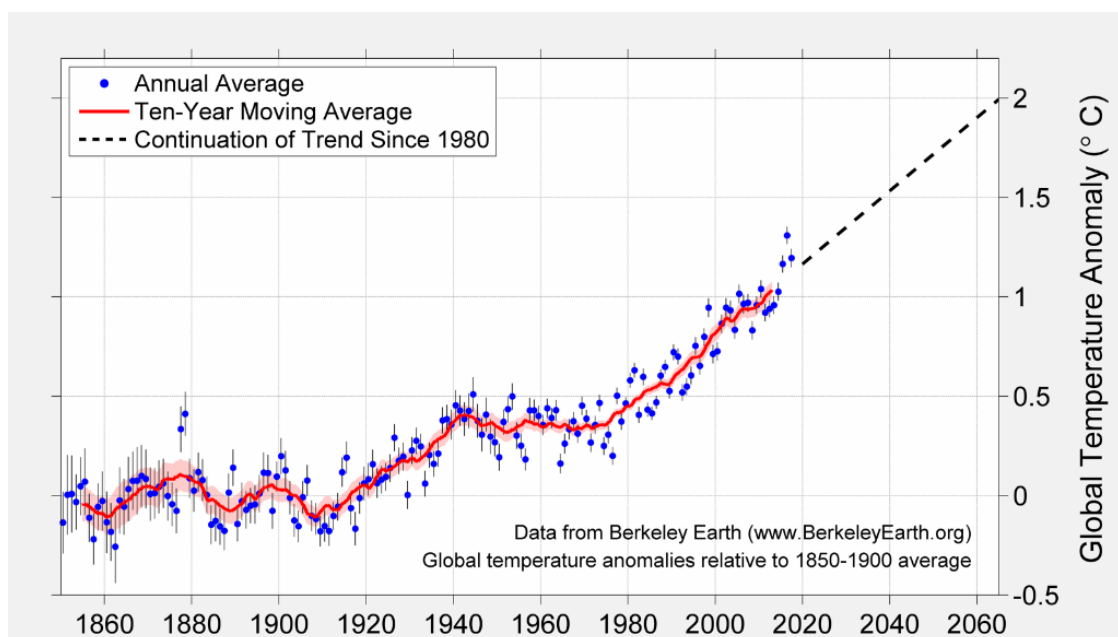
A legelső tag, ahonnan az átlagolást kezdeni lehet: $t = 3$ (y_3)

⁶⁶ a példák forrása: Abonyiné, 1999

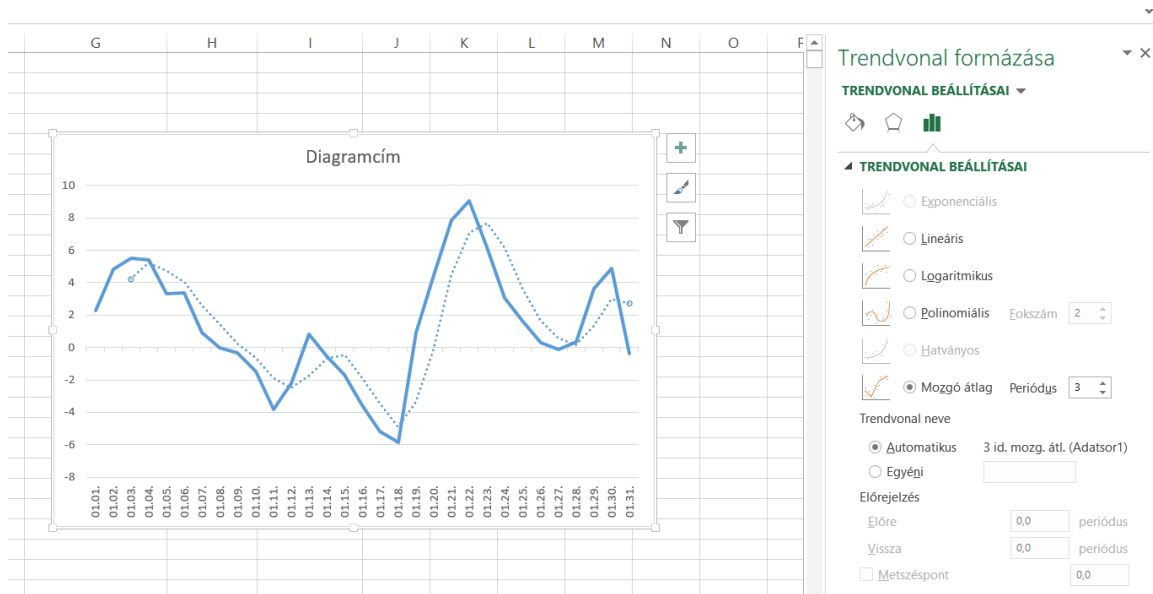
megjegyzés: Az Excel mozgó átlag számolása eltérő a fent megadott képletektől (112. ábra)



110. ábra: Mozgó átlagok
forrás: www.tankonyvtar.hu



111. ábra: Példa 10 éves mozgó átlagra (piros vonallal)
forrás: www.berkeleyearth.org



112. ábra: Mozgó átlag az Excelben
forrás: saját kép (printscreen)

Month	Sales	Moving Average
Jan-08	280	
Feb-08	356	
Mar-08	486	374
Apr-08	603	482
May-08	737	609
Jun-08	815	718
Jul-08	882	811
Aug-08	907	868
Sep-08	952	914
Oct-08	1004	954
Nov-08	1087	1014
Dec-08	1090	1060

113. ábra: Mozgó átlag számolása Excelben
forrás: www.chandoo.org

Feladatok- megoldással

Írjuk fel logaritmus segítségével!

$$3^4 = 81 \rightarrow \log_3 81 = 4$$

$$10^4 = 10\,000 \rightarrow \log_{10} 10000 = 4$$

$$10^{-3} = 0,001 \rightarrow \log_{10} 0,001 = -3$$
$$\lg(0,001) = -3$$

$$e^x = 2,718282 \rightarrow \log_e 2,718282 = x$$
$$\ln(2,718282) = x$$
$$x = 1$$

$$e^x = 0,5 \rightarrow \log_e 0,5 = x$$
$$\ln(0,5) = x$$
$$x = -0,693$$

Százalékszámítás

1, Mennyi 585-nek a 63%-a?

megoldás:

$$68\% = 0,68$$
$$x = 585 \cdot 0,68 = 368,55$$

Tehát 68 %-al nőtt a téglalap területe az oldalhosszak megnövelésével.

2, Hány %-a a 25 a 200-nak?

megoldás:

$$25/200 \cdot 100 = 12,5 \%$$

3, Melyik számnak a 75%-a 375?

megoldás:

$$75\% = 0,75$$

$$x \cdot 0,75 = 375$$
$$x = 375/0,75 = 500$$

4, Magyarország területe 93 036 km². A legnagyobb területű megye Bács-Kiskun megye: 8362 km², a legkisebb területű Komárom megye: 2250 km². Ezek területe az ország területének hány %-a? ⁶⁷

⁶⁷ forrás: www.vmek.oszk.hu

megoldás:

$T = 8362 + 2250 = 10\,612 \text{ km}^2$ (Bács-Kiskun megye és Komárom megye területe együttesen)

Ezek az ország területének $10\,612 / 93\,036 \cdot 100 = 11,4\%$ -át adják.

5, A 4 és 6 m oldalhosszúságú téglalap rövidebb oldalának hosszát 40%-ával, a hosszabbét 20 %-ával megnöveljük. Hány %-al nő a területe?

megoldás:

eredeti téglalap:

$a = 4, b = 6$

$$T_1 = a \cdot b = 4 \cdot 6 = 24 \text{ m}^2$$

megnövelt téglalap:

$a = 4 + 4 \cdot 0,4 = 5,6 \text{ m}$ Ez lesz a 40%-al megnövelt oldalhossz.

$b = 6 + 6 \cdot 0,2 = 7,2 \text{ m}$ Ez lesz a 20%-al megnövelt oldalhossz.

$$T_2 = a \cdot b = 5,6 \cdot 7,2 = 40,32 \text{ m}^2$$

A megnövelt téglalap területének és az eredeti téglalap területének aránya:

$$T_2/T_1 = 40,32/24 = 1,68$$

Tehát az eredeti téglalap területe 68%-al nőtt.

Normálalak

1, Írjuk fel normálalakban a következőket: ⁶⁸

a, $57\,000\,000 = 5,7 \cdot 10^7$

b, $0,000\,000\,049 = 4,9 \cdot 10^{-8}$

c, $-8\,200\,000 = -8,2 \cdot 10^6$

Számoljuk ki számológép nélkül:

$$5 \cdot 10^{23} + 3 \cdot 10^{21} = 5 \cdot 10^{23} + 0,03 \cdot 10^{23} = 5,03 \cdot 10^{23}$$

$$3 \cdot 10^{14} + 2 \cdot 10^{12} = 3 \cdot 10^{14} + 0,02 \cdot 10^{14} = 3,02 \cdot 10^{14}$$

2, A csillagászatban az állócsillagok távolságát fényévekkel adják meg.

Egy fényév az a távolság, amelyet a fénysugár egy esztendő alatt tesz meg. A fény terjedési sebessége $300\,000 \text{ km/s}$.

Számítsuk ki, hogy hány km hosszúságú egy fényév? (Egy hónapot 30 napnak tekintsünk.) ⁶⁹

megoldás:

$$360 \text{ nap} = 31\,104\,000 \text{ s} = 3,1104 \cdot 10^7 \text{ s}$$

$$v = s/t \rightarrow s = v \cdot t = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s} \cdot 3,1104 \cdot 10^7 \text{ s} = 9,3312 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

⁶⁸ forrás: Hajnal, 1987

⁶⁹ forrás: Hajnal, 1987

Mértékegység átváltás

1, A világ talajaiban tárolt szénkészlet 1500 Gt.
Adjuk meg ennek az értékét Pg-ban! ⁷⁰

megoldás: $1500 \text{ Gt} = 1500 \cdot 10^9 \cdot 10^6 \text{ g} = 1500 \cdot 10^{15} \text{ g} = 1500 \text{ Pg}$

2, átváltások ⁷¹

$$1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m} = 0,01 \cdot 10^{-9} \text{ nm} = 1 \cdot 10^{-7} \text{ nm}$$

$$1 \mu\text{m} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 10^2 \text{ cm} = 1 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$$

$$1 \text{ nm} = 10^{-6} \text{ mm}$$

$$1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ ha} = 10\,000 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ cm}^2 = 10^8 \mu\text{m}^2$$

$$1 \text{ cm}^3 = 10^{-3} \text{ l} = 1 \text{ ml}$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l} = 1000 \text{ ml}$$

$$1 \text{ cm}^3 = 10^{12} \mu\text{m}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ l}$$

Alapműveletek, mértékegységek átváltása

1, A népszámlálás szerint 2011. október 1-jén Magyarország lakónépessége 9 937 628 fő volt, 2001-ben pedig 10 198 315 fő. A népesség csökkenése a természetes fogyásból eredt: 387 205 fő volt ez az érték (forrás: KSH). ⁷²

Mekkora volt a migrációs (vándorlási) egyenleg a vizsgált időszakban?

megoldás:

$$10\,198\,315 - 9\,937\,628 = 260\,687$$

$$387\,205 - 260\,687 = 126\,518 \text{ fő}$$

2, Egy térkép méretaránya 1:20 000. Kijelölünk rajta egy 3 cm·3 cm-es sík mintaterületet felmérési célból. ⁷³

A valóságban hány négyzetkilométernyi területet kell felmérni?

megoldás:

$$60\,000 \cdot 60\,000 = 3,6 \cdot 10^9 \text{ cm}^2$$

$$3,6 \cdot 10^9 \text{ cm}^2 = 3,6 \cdot 10^7 \text{ dm}^2 = 3,6 \cdot 10^5 \text{ m}^2 = 3,6 \cdot 10^{-1} \text{ km}^2 = 0,36 \text{ km}^2$$

Tehát a valóságban 0,36 km² területet kell felmérni.

⁷⁰ forrás: Telbisz et al., 2013

⁷¹ forrás: Telbisz et al., 2013

⁷² forrás: Telbisz et al., 2013

⁷³ forrás: Telbisz et al., 2013

3, A Kemence-patak vízgyűjtőterületének nagysága 107 km^2 .⁷⁴

A vízgyűjtőterület 20%-án 3 mm csapadék hullott, amelynek 5 %-a a patakba jutott. A mérési pontunkon a vízhozam $0,294 \text{ m}^3/\text{s}$, a bejutott csapadékvíz ezt a vízhozamot 50%-al növelte meg.

- a) Mennyi csapadékvíz (m^3) jutott a patakba? Az értéket a szám normálalakjában adjuk meg!
- b) A mérési pontunkon egy óra alatt mennyi víz (m^3) jut át a megnövekedett vízhozam esetében? Az értéket a szám normálalakjában adjuk meg!

megoldás:

a)

$$107 \cdot 0,2 = 21,4 \text{ km}^2 = 21,4 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 2,14 \cdot 10^7 \text{ m}^2$$

$$3 \text{ mm} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$6,42 \cdot 10^{11} \text{ mm}^3$$

$$0,05 \cdot 6,42 \cdot 10^{11} = 3,21 \cdot 10^{10} \text{ mm}^3 = 32,1 \text{ m}^3 = 3,21 \cdot 10^1 \text{ m}^3$$

$$V = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 2,14 \cdot 10^7 \text{ m}^2 = 6,42 \cdot 10^4 \text{ m}^3$$

$$0,05 \cdot 6,42 \cdot 10^4 = 0,321 \cdot 10^4 \text{ m}^3 = \mathbf{3,21 \cdot 10^3 \text{ m}^3}$$

Tehát $\mathbf{3,21 \cdot 10^3 \text{ m}^3}$ csapadékvíz jutott a patakba.

b)

$$1058,4$$

$$1058,4 + 0,5 \cdot 1058,4 = 1587,6 \text{ m}^3 = 1,5876 \cdot 10^3 \text{ m}^3$$

$$0,441 \text{ m}^3/\text{s} \cdot 60 \cdot 60 = 1,5876 \cdot 10^3 \text{ m}^3$$

Tehát $\mathbf{1,59 \cdot 10^3 \text{ m}^3}$ víz jutott át a mérési ponton a megnövekedett vízhozam esetén.

4, Hazánk alföldi megyéinek területét, lakónépességének számát az alábbi táblázat tartalmazza (forrás: KSH)⁷⁵

	Bács-Kiskun	Békés	Csongrád	Hajdú-Bihar	Jász-Nagykun-Szolnok	Szabolcs-Szatmár-Bereg	szumma
Terület (km^2)	8445	5631	4263	6211	5582	5936	36 068
Lakónépesség (ezer fő), 2012	522	363	412	543	390	565	2 795 000

a) Mekkora az Alföld (hat megye) népsűrűsége ($\text{fő}/\text{km}^2$)?

b) Mekkora az alföldi megyék népességének átlaga?

⁷⁴ forrás: Telbisz et al., 2013

⁷⁵ forrás: Telbisz et al., 2013

c) Melyik a legnagyobb (maximum) és melyik a legkisebb (minimum) népsűrűségű alföldi megye (fő/km² értékkel)?

a) népsűrűség = $2795000/36068 = 77,49251$ fő/km²

b) a népesség átlaga = $2795000 / 6$
= 465833 fő

c) Bács-Kiskun:	61,81172	kb. 62 fő/km ²
Békés:	64,46457	kb. 64 fő/km ²
Csongrád:	96,64555	kb. 97 fő/km ²
Hajdú-Bihar:	87,42554	kb. 87 fő/km ²
Jász-Nagykun-Szolnok:	69,86743	kb. 70 fő/km ²
Szabolcs-Szatmár-Bereg:	95,18194	kb. 95 fő/km ²

A legnagyobb népsűrűségű Csongrád megye, legkisebb népsűrűségű Bács-Kiskun megye.

5, A táblázat egy város népességszámra vonatkozó adatait tartalmazza 1950-ben és 2000-ben. ⁷⁶

	1950	2000
teljes népesség (fő)	250 000	300 000
városi népesség (fő)	125 000	210 000
városi népesség aránya (%)	50	70

a) Mekkora a városi népesség aránya 1950-ben és 2000-ben?

megoldás:

1950-ben: $125\,000/250\,000 = 0,5 = 50\%$

2000-ben: $210\,000/300\,000 = 0,7 = 70\%$

b) Hány százalékponttal nőtt a városi népesség aránya?

megoldás: $70-50 = 20$ százalékponttal nőtt

c) Hány %-al nőtt meg a városi népesség száma?

megoldás:

$210\,000/125\,000 = 1,68$

Tehát a városi népesség száma 68 %-al nőtt.

6, Számoljuk ki az egyes városok születési rátáját! ⁷⁷

Település	Lakónépesség (2008)	Születések száma (2008)
Budapest	1 712 210	17 270
Miskolc	170 234	1633
Szeged	169 030	1637
Berente	1 110	9
Drávapiski	126	1
Dötk	26	1

⁷⁶ forrás: Telbisz et al., 2013

⁷⁷ forrás: Unger et al., 2010

A születési ráta számítása: $SZR = \frac{x}{n} \cdot 1000$

x = születések száma

n = népességszám

A születési ráták kiszámítása ezrelékben:

$$\text{Budapest: } SZR = \frac{17270}{1712210} \cdot 1000 = 10,1$$

$$\text{Miskolc: } SZR = \frac{1633}{170234} \cdot 1000 = 9,6$$

$$\text{Szeged: } SZR = \frac{1637}{169030} \cdot 1000 = 9,7$$

$$\text{Berente: } SZR = \frac{9}{1110} \cdot 1000 = 8,1$$

$$\text{Drávapiski: } SZR = \frac{1}{126} \cdot 1000 = 7,9$$

$$\text{Dötk: } SZR = \frac{1}{26} \cdot 1000 = 38,5$$

7, Egy mérési ponton az alábbi táblázatban szereplő léghőmérséklet értékeket mérték. ⁷⁸

Időpont	1:00	7:00	13:00	19:00	max	min
Léghőmérséklet	10,3	10,2	18,5	16,2	20,3	9,9

a) Mekkora volt a napi középhőmérséklet?

b) Mekkora volt a napi hőingás?

megoldás:

a) A középhőmérséklet a 4 időpontban mért értékek számtani átlaga: 13,8 °C

b) A hőingás: max hőmérséklet - min hőmérséklet = 20,3 – 9,9 = 10,4 °C

Összetettebb feladatok

1, Az alábbi táblázat az adott hőmérsékleten befogadható maximális vízgőztartalmat mutatja. ⁷⁹

⁷⁸ forrás: Telbisz et al., 2013

⁷⁹ forrás: Telbisz et al., 2013

°C	0	5	10	15	20	25	30
g/m ³	5	7	9	13	17	23	30

a) Ha a tengerszinten lévő mérési pontunkban 25°C esetében 39% a relatív (viszonylagos) vízgőztartalom, akkor mennyi az abszolút (tényleges) vízgőztartalom?

b) A hegyoldalon emelkedve, ha 100 méterenként 1°C-ot csökken a hőmérséklet, akkor milyen magasságban érjük el a harmatpontot? (Az abszolút vízgőztartalom nem változik.)

megoldás:

a) Ha a relatív vízgőztartalom 39 %, akkor az adott hőmérsékleten befogadható maximális vízgőzmennyiségnek (abszolút vízgőztartalom) 39%-át tartalmazza.

A táblázatból látható, hogy 25 °C-on a maximálisan befogadható vízgőzmennyiség 23 g/m³.

Tehát az abszolút vízgőztartalma = $23 \cdot 0,39 = 8,97 \text{ g/ m}^3$

b) Harmatpont: ahol az abszolút vízgőztartalom az adott hőmérsékletre vonatkozóan a maximális értéket veszi fel. A relatív vízgőztartalom 100%.

A megoldás lépései:

- tengerszinten: 25 °C-os levegő, 39 % RH, 8,97 g/ m³ vízgőztartalom
- Az abszolút vízgőztartalom nem változik, tehát végig 8,97 g/ m³ vízgőzt tartalmaz. Melyik magasságon lesz ez az érték egyenlő a maximálisan befogadható vízgőztartalommal?
- A táblázat alapján látható, hogy kb. 10 °C-ig kell lehűlnie a levegőnek, hogy 9 g/m³ legyen a maximálisan befogadható vízgőzmennyiség. Legyen ez most a választott értékünk (már csak 0,03 g/ m³-el tér el a 8,97-től).
- A kiindulási hőmérséklet 25°C, a cél pedig a 10 °C. A kettő között 15 °C különbség van. Tehát ennyit hűl a levegő.
- Hány métert kell emelkednie a levegőnek, hogy 10 °C-ra hűljön?
 - Ha 100 méterenként 1 °C-ot hűl, akkor x méteren hűl 15 °C-ot.

$$100/x = 1/15 \quad \text{ezt átrendezve: } x = 100 \cdot 15 = 1500$$

Tehát kb. 1500 méter magasan éri el a harmatpontot.

2, Az Észak-Atlanti hátság területén a kőzetlemezek évi átlagban kb. $4 \cdot 10^{-2}$ m-rel távolodnak egymástól. (v)⁸⁰

Jelenleg a medence szélessége kb. $5 \cdot 10^6$ m (w).

⁸⁰ forrás: Palmer, 2014

a) Adjunk meg egy összefüggést, amivel ki lehet számolni az Észak-Atlanti medence korát (A) a v és w adatok felhasználásával!

b) Számoljuk ki az Észak-Atlanti medence korát!

a) $A = w/v$ $w = A \cdot v$

b) $A = 5 \cdot 10^6 / 4 \cdot 10^{-2} = 1,25 \cdot 10^8 \text{ év}$ *Az Észak-Atlanti medence kora kb. 125 millió év.*

3, Exponenciális függvénnyel kapcsolatos feladat ⁸¹

A radioaktív bomlás egyenlete: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$

ahol N_0 a radioaktív "szülő"-izotóp kezdeti tömege, $N(t)$ pedig a t idő után megmaradt tömege, λ a bomlásra jellemző konstans érték.

A felezési idő ($T_{1/2}$) az az idő, amennyi idő alatt radioaktív izotóp kezdeti tömege a felére csökken.

Tegyük fel, hogy a radioaktív izotóp felezési ideje 37 év. Kezdeti tömege 100 g.

Hány év múlva csökken a kezdeti tömege 64 g-ra?

megoldás:

x tengely: idő (t) - független változó

y tengely: tömeg - függő változó

exponenciális függvény (a változó – t – a radioaktív bomlás egyenletében a kitevőben szerepel)

A felezési idő: $T_{1/2} = 37 \text{ év}$

Ekkor a radioaktív anyag tömege a kezdeti tömeg fele: $N(t) = N_0/2$

A kezdeti tömeg a 0. időpillanatban: $N_0 = 100 \text{ g}$, $t = 0 \text{ év}$

1. kiszámítjuk a λ (lambda) értékét, felhasználva a rendelkezésre álló adatokat:

$$\lambda = ?$$

$$t = 37 \text{ évnél } (T_{1/2})$$

$$N(t)/N_0 = 0,5$$

Behelyettesítünk a radioaktív bomlás képletébe, $t = 37 \text{ év}$ esetén, és vesszük az egyenlet mindkét oldalának természetes alapú logaritmusát:

$$N(37) = 100 \cdot e^{-\lambda \cdot 37}$$

⁸¹ forrás: Palmer, 2014., Telbisz et al., 2013.

$$50 = 100 \cdot e^{-\lambda \cdot 37}$$

$$0,5 = e^{-\lambda \cdot 37}$$

$$\log_e 0,5 = -\lambda \cdot 37$$

$$\ln(0,5) = -\lambda \cdot 37$$

$$\ln(0,5)/(-37) = \lambda$$

$$\lambda = 0,0187$$

Tehát erre a radioaktív anyagra jellemző $\lambda = 0,0187$.

Ezután ezt a λ értéket helyettesítjük be a radioaktív bomlás képletébe és számítjuk ki, hogy hány év után lesz a tömeg 64 g. Az ismeretlen tehát most az eltelt idő (t).

t = ?

tudjuk, hogy a t. időpillanatban a tömeg: $N(t) = 64$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$$64 = 100 \cdot e^{-0,0187 \cdot t}$$

$$t = 23,86 \text{ év}$$

4, Lineáris függvénnyel kapcsolatos feladat ⁸²

A légköri CO₂ mennyisége/keverési aránya (parts per billion, ppm) folyamatosan növekszik (mérések az 1950-es évektől mutatják egyértelműen).

A Mauna Loa (Hawaii) obszervatórium mérései biztosítják a CO₂ háttérkoncentrációra vonatkozó adatokat, amelyek segítségével megfigyelhető a CO₂ koncentráció hosszútávú változása, így a klímaváltozáshoz kapcsolódó trendek megfigyelése.

Az itt mért adatok alapján az látható, hogy a CO₂ koncentráció növekedési üteme kb. 1,5 ppm/év (ez egy konstansnak vett érték, de a valóságban évről-évre ingadozik). 2011-ban az évi átlagos CO₂ keverési arány 391,57 ppm volt.

a) Felhasználva a megadott növekedési ütemet, melyik évben fogja átlépni a CO₂ keverési aránya:

1. a 400 ppm-et?

2. a 425 ppm-et?

b) Mennyi szén halmozódott fel a légkörben 2011 és 2017 között?
Számold ki, feltételezve, hogy 1 ppm durván 2 Pg C-nek felel meg.

megoldás:

a)

1. Mikor lépte át a 400 ppm-et?

x = év

⁸² forrás: Palmer, 2014

$$391,57 + 1,5 \cdot x = 400$$

$$x = (400 - 391,57) / 1,5 = 5,62 \text{ év}$$

Tehát 2011+6 = 2017-ben lépte át a 400 ppm-et.

2. Mikor fogja átérni a 425 ppm-et?

$$391,57 + 1,5 \cdot x = 425$$

$$x = 22,28 \text{ év}$$

Tehát 2011+23 = 2033-ban fogja átlépni a 425 ppm-et.

b) Mennyi Pg szén halmozódott fel 2011 és 2017 között?

$$1 \text{ Pg} = 10^{15} \text{ g}$$

$$x = 6$$

$$391,57 + 1,5 \cdot 6 = 400,57$$

2017 és 2011 között mennyi ppm változás volt?

9 ppm

$$1 \text{ ppm} = 2 \text{ Pg C}$$

$$9 \text{ ppm} = 18 \text{ Pg C} = 18 \cdot 10^{15} \text{ g C} = 1,8 \cdot 10^{10} \text{ t C}$$

$$1 \text{ tonna} = 1000 \text{ kg} = 1\,000\,000 \text{ g}$$

Képletbe helyettesítések

1. A Fujita-skála (F-skála) a tornádók intenzitását osztályozza a tornádó által az emberi környezetben és a vegetációban okozott károk alapján.⁸³

Az F szám és a becsült szélsősebesség (v [m/s]) közötti összefüggést az alábbi egyenlet adja meg:

$$v(F) = 6,3 \cdot (F+2)^{3/2}$$

- a) Számítsuk ki a szélsősebességet a F0-F5 értékek esetében!
- b) A tömegspecifikus kinetikus energia (E) így adható meg: $E = v(F)^2/2$

Írjuk fel az összefüggést az E-re a $v(F)$ egyenlet felhasználásával!

- c) Mi az E mértékegysége?
- d) Számítsuk ki a 0-5 közötti F számokra vonatkozó tömegspecifikus kinetikus energiát (E)!

megoldások:

- a) és d)

⁸³ forrás: Palmer, 2014.

F Skála érték	v(F) (szélsebesség, m/s)	E (tömegspecifikus kinetikus energia)
0	17,82	158,8
1	32,74	535,8
2	50,40	1270,1
3	70,44	2480,6
4	92,59	4286,5
5	116,68	6806,8

c) E mértékegysége = m^2/s^2

2, Egyensúly esetén a Naptól érkező besugárzás, illetve a földfelszín és a légkör által kisugárzott energia megegyezik.⁸⁴

A következő egyenlet írja le a Föld felszíni hőmérsékletét (Kelvinben): $T = \sqrt[4]{(1 - \alpha)S_0/4\sigma}$

ahol α a felszín albedója, S_0 a napenergia fluxus a felszínen, σ pedig a Stefan-Boltzmann konstans.

A Földre vonatkoztatva az értékek a következők:

$$\alpha = 0,3$$

$$S_0 = 1379 \text{ W m}^{-2}$$

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

a) Számítsuk ki a Föld felszíni hőmérsékletét!

megoldás:

$(1-\alpha)$	S_0	$4 \cdot \sigma$	$(1-\alpha) \cdot S_0 / 4 \cdot \sigma$	$\sqrt[4]{(1-\alpha)S_0/4\sigma}$
0,7	1379	$2,268 \cdot 10^{-7}$	4256172840	255,4199

Tehát a Föld felszíni hőmérséklete kb. 255 K.

Számtani átlag, súlyozott számtani átlag

1, Számtani átlag

A táblázat egy település cukrászdáinak bevételét tartalmazza (1998-as adatok).⁸⁵

Mekkora volt ebben az évben a cukrászdánkénti átlagos bevétel?

Cukrászda	Árbevétel ezer Ft-ban
A	8260
B	3420
C	9614
D	10500
E	4528

⁸⁴ forrás: Palmer, 2014

⁸⁵ forrás: Abonyiné, 1999

összesen: 36322 Ft a bevétel

átlagosan = $36322/5 = 7264,4$ Ft

2, Súlyozott számtani átlag

A táblázat az egyes gazdasági ágazatokban foglalkoztatottak havi bruttó átlagkeresetét, illetve a foglalkoztatottak létszámát tartalmazza (1997-es adat. Forrás: Magyar Stat. Évkönyv, 1998. 87. o.).⁸⁶

Számítsuk ki az ipar-építőipar egészében foglalkoztatottak havi bruttó átlagkeresetét!

Gazdasági ág	Havi bruttó átlagkereset (Ft/fő)	Létszám ezer fő (f_i)
Bányászat	77263	27,2
Feldolgozóipar	58915	864,1
Villamos energia előállítás	75972	94,7
Építőipar	50439	219,2

Ebben a példában a súlytényezők (f_i) az egyes ágazatokban dolgozók létszáma, az x_i tagok pedig az egyes ágazatokban dolgozók havi bruttó átlagkeresete.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \cdot X_i}{\sum_{i=1}^k f_i}$$

Képezzük a súlyozott számtani átlagot az alábbi képletbe helyettesítéssel:

$$\bar{x} = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + f_4 \cdot x_4}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}$$

$$\bar{x} = \frac{27,2 \cdot 77263 + 864,1 \cdot 58915 + 94,7 \cdot 75972 + 219,2 \cdot 50439}{27,2 + 864,1 + 94,7 + 219,2} = \frac{71260782}{1205,2} = 59127,8$$

Tehát a havi bruttó átlagkereset az ipar-építőiparban 59 128 Ft volt az 1997-es adat szerint.

3, Súlyozott számtani átlag számítása osztályközös értékkel megadott mennyiségi sorokból

Az alábbi táblázatban egy törpefalu villamosenergia fogyasztásának megoszlása látható.⁸⁷

Mennyi villamosenergiát (kWh) használ egy fogyasztó átlagosan?

⁸⁶ forrás: Abonyiné, 1999

⁸⁷ forrás: Abonyiné, 1999

A fogyasztás (kWh)	A fogyasztók száma
5-24	4
25-44	6
45-64	14
65-84	22
85-104	14
105-124	5
125-144	7
145-164	3

A megoldás menete:

- osztályközepek (x_i) kiszámítása
5-24 osztály: $x_1 = (5+24)/2 = 14,5$
5-44 osztály: $x_2 = (25+44)/2 = 34,5$
45-64 osztály: $x_3 = (45+64)/2 = 54,5$
65-84 osztály: $x_4 = (65+84)/2 = 74,5$
85-104 osztály: $x_5 = (85+104)/2 = 94,5$
105-124 osztály: $x_6 = (105+124)/2 = 114,5$
125-144 osztály: $x_7 = (125+144)/2 = 134,5$
145-164 osztály: $x_8 = (145+164)/2 = 154,5$
- A gyakoriságok szorzása az osztályközepekkel
 $f_1 \cdot x_1 = 4 \cdot 14,5 = 58$
 $f_2 \cdot x_2 = 6 \cdot 34,5 = 207$
 $f_3 \cdot x_3 = 14 \cdot 54,5 = 763$
 $f_4 \cdot x_4 = 22 \cdot 74,5 = 1639$
 $f_5 \cdot x_5 = 14 \cdot 94,5 = 1323$
 $f_6 \cdot x_6 = 5 \cdot 114,5 = 572,5$
 $f_7 \cdot x_7 = 7 \cdot 134,5 = 941,5$
 $f_8 \cdot x_8 = 3 \cdot 154,5 = 463,5$
- Az $f_i \cdot x_i$ szorzatok, illetve a gyakoriságok (f_i) összeadása

$$\sum_{i=1}^8 f_i \cdot x_i = 5967,5$$

$$\sum_{i=1}^8 f_i = 75$$

- A súlyozott átlag:

$$\frac{\sum_{i=1}^8 f_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^8 f_i} = \frac{5967,5}{75} = 79,6$$

Tehát egy fogyasztó átlagosan 79,6 kWh-t használ fel.

1, 1980-ban Magyarország kukoricatermelése 6673 ezer tonna volt, 1995-re 4680 ezer tonnára csökkent. Mennyi az évi átlagos kukorica termeléseszkökenés? ⁸⁸

Év	kukoricatermelés (ezer tonna)
1980	6673
1995	4680

Az átlagos abszolút változás számítása az első és az utolsó adat átlagaként:

$$x = (4680 - 6673) / 2 = - 996,5$$

Tehát átlagosan 996,5 ezer tonnával csökkent 1980-tól 1995-ig a kukoricatermelés.

2, A táblázat a turisták számának alakulását tartalmazza. Számoljuk ki az átlagos abszolút változást, illetve az átlagos relatív változást! ⁸⁹

Év	Turisták száma (E fő)	abszolút változás	relatív változás (ún. láncviszonyszám)
1985	9 724	10613 - 9724 = 889	10613/9724 = 1,09
1986	10 613	12087 - 10613 = 1 474	12087/10613 = 1,14
1987	12 087	10766 - 12087 = -1 321	10766/12087 = 0,89
1988	10 766	14490 - 10766 = 3 724	14490/10766 = 1,35
1989	14 490	20510 - 14490 = 6 020	20510/14490 = 1,42
1990	20 510	21860 - 20510 = 1 350	21860/20510 = 1,07
1991	21 860	20188 - 21860 = -1 672	20188/21860 = 0,92
1992	20 188	22804 - 20188 = 2 616	22804/20188 = 1,13
1993	22 804		

Az átlagos abszolút változás az abszolút változások számtani átlaga:

$$\frac{889 + 1474 + (-1321) + 3724 + 6020 + 1350 + (-1672) + 2616}{8} = 1635$$

Az átlagos relatív változás a relatív változások mértani átlaga:

$$\sqrt[8]{1,09 * 1,14 * 0,89 * 1,35 * 1,42 * 1,07 * 0,92 * 1,13} = 1,11$$

Ezek kiszámolhatók a mennyiségi sor első és utolsó tagjaiból is:

$$\text{átlagos abszolút változás} = \frac{22804 - 9724}{8} = 1635$$

⁸⁸ forrás: Abonyiné, 1999

⁸⁹ forrás: www.tankonyvtar.hu

$$\text{átlagos relatív változás} = \sqrt[8]{\frac{22804}{9724}} = 1,11$$

Ez azt jelenti, hogy 1985-1993 között évente átlagosan 1635 fővel nőtt a turisták száma, ami 11%-os átlagos növekedést jelent évente.

Tehát ha minden évben 1635 fővel nőtt volna a turisták száma, az 1985-ös 9724 főről akkor is elérte volna a turisták száma 1993-ra a 22804-et.

Ha a növekedés minden évben 11% lett volna, 8 év alatt akkor is összesen 235%-ra nőtt volna a turisták száma (ahogy lett is, mert $22804/9724 = 2,35$, ami 235%-nak felel meg).

Az abszolút változásra felírható lineáris egyenlet:

$$y = a \cdot x + b$$

ahol $b = 9724$ (a kezdeti, 1985-ös érték), $a = 1635$ (az átlagos abszolút változás), x pedig az eltelt idő (évben).

Tehát ha $x = 8$ (8 év múlva szeretnénk kiszámolni az értéket, lineáris változást feltételezve), akkor $y = 1635 \cdot 8 + 9724 = 22804$. Visszakaptuk a táblázatban szereplő 1993-as értéket.

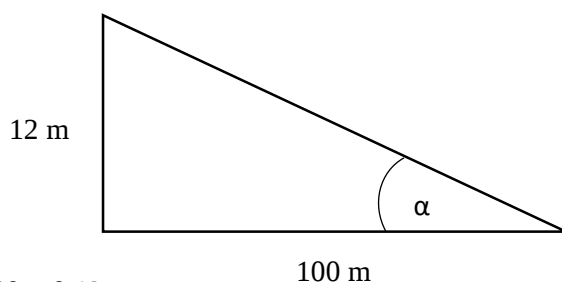
Trigonometria

1, Az emelkedő előtti közlekedési táblára 12%-ot írtak. Ez azt jelenti, hogy a vízszintes irányú haladáshoz képest a lejtő emelkedése 12%.⁹⁰

Hány fokos a lejtő emelkedési szöge (α)?

$$12\% = 0,12 = 12/100$$

12 métert emelkedik 100 méteren



Az α szög tangense így írható fel: $\tan(\alpha) = 12/100 = 0,12$

amelyből $\alpha = 6,8^\circ$

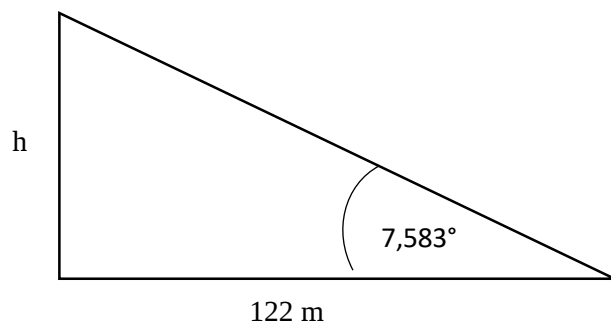
Tehát a lejtő emelkedési szöge $6,8^\circ$.

2, Egy lejtő hossza 122 méter, hajlásszöge $7^\circ 35'$.

Milyen magasra visz a lejtő?⁹¹

$$1^\circ = 60' \text{ (szögperc)}$$

$$1' = 60'' \text{ (szögmásodperc)}$$



⁹⁰ forrás: www.kooperativ.hu

⁹¹ forrás: www.kooperativ.hu

Ha tudjuk, hogy $60' = 1^\circ$, akkor a $35'$ átváltása $^\circ$ -ba:

$$60' = 1^\circ$$

$$35' = x^\circ$$

$$x = 35/60 = 0,583^\circ$$

$$\text{Tehát } 7^\circ 35' = 7,583^\circ$$

$$h = ?$$

h kiszámítható, ha felírjuk a szög tangensének kiszámítását és átrendezzük:

$$\tan(7,583^\circ) = h/122$$

$$h = \tan(7,583^\circ) \cdot 122 = 0,1331 \cdot 122 = 16,24 \text{ m}$$

Tehát 16,24 m magasra visz fel ez a lejtő.

Vektorok

1, Az óceánon/tengeren úszó bóják az óceáni áramlásokról gyűjtenek információt. ⁹²

Egy áramlat déli irányba sodor egy bóját $0,75 \text{ m/s}$ -al, míg a szél a bóját nyugati irányba sodorja $0,60 \text{ m/s}$ -al.

- Rajzoljuk fel koordinátarendszerben a sebesség komponenseket és a tényleges haladási irányt jelző vektort!
- Számítsuk ki a tényleges haladást jellemző sebességvektor (r) nagyságát!
- Számítsuk ki a tényleges haladást jellemző sebességvektor irányát!

megoldás:

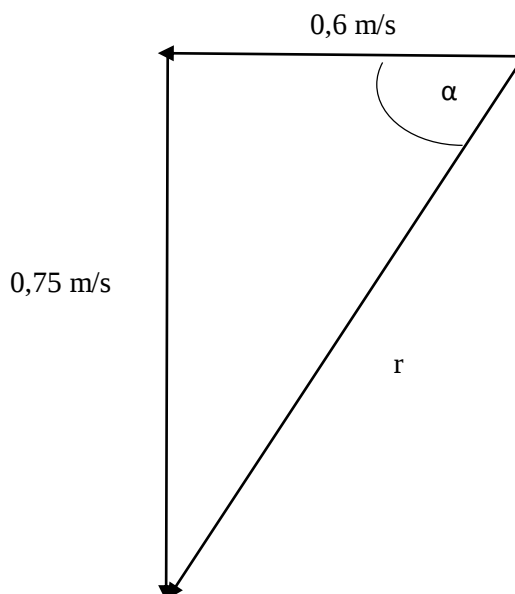
a) lásd a rajzot

b)

$$r = \sqrt{0,6^2 + 0,75^2} = 0,96 \text{ m/s}$$

$$\tan(\alpha) = 0,75/0,6 = 1,25$$

$$\alpha = 51,3^\circ$$



⁹² forrás: Palmer, 2014.

c) tényleges haladási irány

Az északi
irányhoz képest
 $141,3^\circ$ nyugatra,
vagy $218,7^\circ$
keletre.

2, Vektormennyiségek átlagolása

Az alábbi táblázat az átlagos napi szélsősebesség és szélirány értékeket tartalmazza Edinburgh esetében, 5 napos időszakra.⁹³

Számítsuk ki a táblázat alapján az 5 napra vonatkozó átlagos szélsősebességet és szélirányt!

Időszak egy héten	Szélsősebesség [m/s]	Szélirány [°]
hétfő, kedd, szerda	10	45
csütörtök, péntek	13,5	38

megoldás:

A *szélsősebesség* átlaga: súlyozott átlagként kerül kiszámításra
a súlytényezők a gyakoriságok (tehát hogy hány napon fordul elő az adott szélsősebesség)

A szélsősebesség átlaga = $(3 \cdot 10 + 2 \cdot 13,5) / 5 = 11,4$ m/s

A *szélirány* esetén fel kell bontani a vektort x és y irányú komponensekre, ezeket külön átlagolni, majd kiszámítani az átlag értékekhez tartozó szöveget. Ez lesz a szélirány átlaga,

1. ha a meteorológiai szélirány 45°

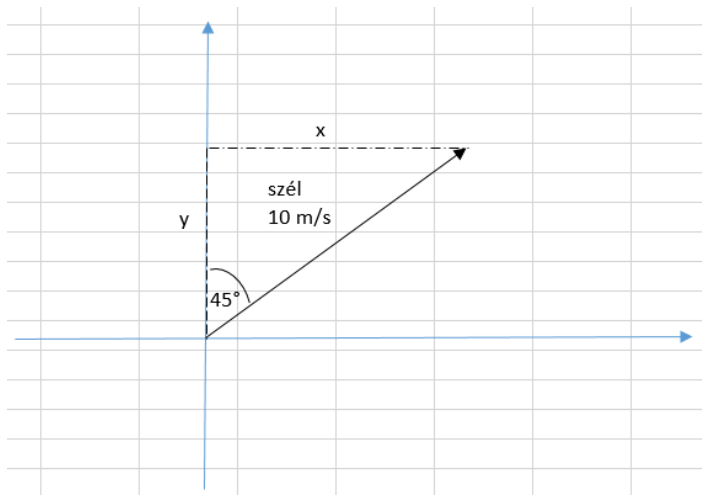
A vektor hossza a szélsősebesség nagysága, tehát 10 (m/s).

Mivel derékszögű háromszögről van szó, a hegyesszögek szögfüggvényeit lehet alkalmazni.

$$\sin(45^\circ) = x/10$$
$$x = \sin(45^\circ) \cdot 10 = 7,07$$

$$\cos(45^\circ) = y/10$$
$$y = \cos(45^\circ) \cdot 10 = 7,07$$

⁹³ forrás: Palmer, 2014.



114. ábra: forrás: saját szerkesztés

2. ha a meteorológiai szélirány 38°

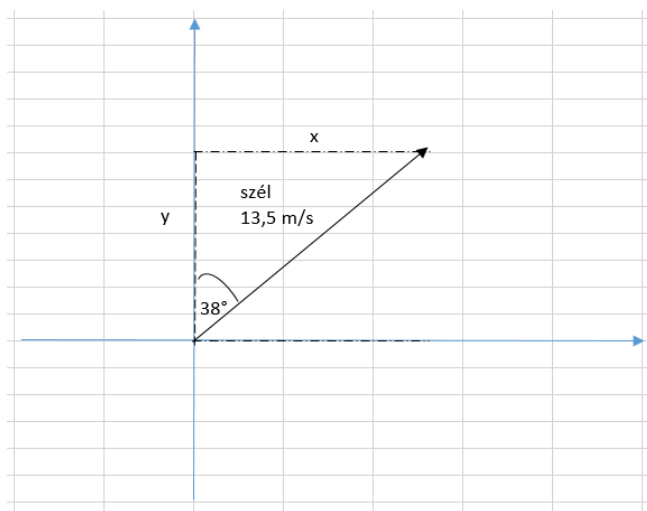
A vektor hossza a szélssebesség nagysága, tehát 13,5 (m/s).

$$\sin(38^\circ) = x/13,5$$

$$x = \sin(38^\circ) \cdot 13,5 = 8,3$$

$$\cos(38^\circ) = y/13,5$$

$$y = \cos(38^\circ) \cdot 13,5 = 10,64$$



115. ábra: forrás: saját szerkesztés

A szélirány átlagot úgy képezzük, hogy külön kiszámítjuk az x, illetve az y komponensek súlyozott átlagát:

$$x \text{ átlag} = (3 \cdot 7,07 + 2 \cdot 8,3) / 5 = 7,562$$

$$y \text{ átlag} = (3 \cdot 7,07 + 2 \cdot 10,64) / 5 = 8,498$$

Ezután ezek felhasználásával képezzük a szöveget:

$$\tan(\alpha) = x/y = 7,562/8,498 = 0,89$$

ebből $\alpha = 41,67^\circ$

Tehát az átlagos szélirány 41,7°.

Excelben megoldható ábrázolási, statisztikai feladatok

1, Jellemezzük statisztikai mutatókkal az alábbi adatsort!

Számítsuk ki az adatsorra vonatkozó átlagot, szórást, mediánt, valamint adja meg a móduszt, ha van.

Év	Hőmérséklet (°C)
1969	1,9
1970	2,4
1971	-0,5
1972	-4,9
1973	-0,1
1974	2,6
1975	2,9
1976	-2,8
1977	-2,6
1978	-3,8
1979	3
1980	4,2

megoldás:

terjedelem: max - min = 4,2 - (-4,9) = 9,1
n (elemszám): 12
számtani átlag: 0,2
szórás: 3,1
medián: 0,9
módusz: nincs

Excelben a használt függvények nevei: MAX, MIN, DARAB, ÁTLAG, SZÓRÁS, MEDIÁN, MÓDUSZ.TÖBB

Megjegyzés: lehetőség van az Excel Adatelemzés bővítmény aktiválására, amelynek segítségével többek között a leíró statisztika elemzés is egy kattintásra megvalósítható. A bővítmény aktiválásának lépései:

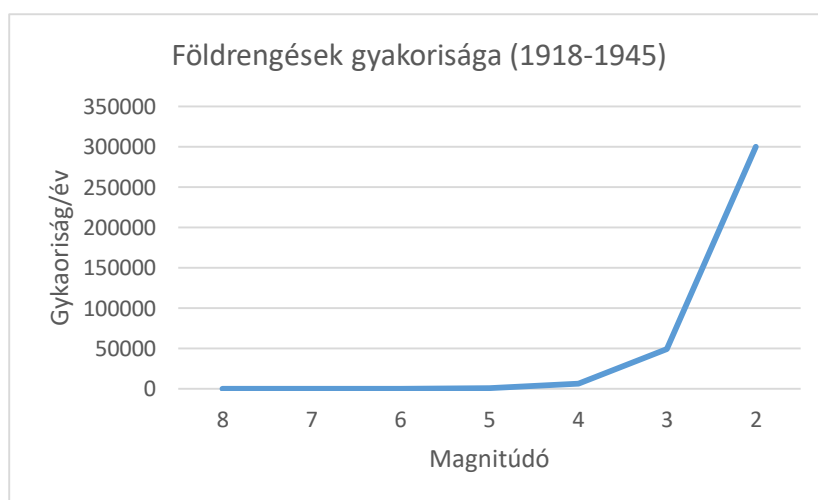
1. Excelben kattintsunk a *Fájl* → *Beállítások* → *Bővítmények kezelése* gombra
2. Válasszuk ki a *Kezelés* listából az *Excel bővítmények*-et, majd kattintsunk az *Ugrás* parancsra. Ezután megjelenik a *Bővítmények párbeszédpanel*.
3. A *Létező bővítmények* mezőben az *Adatelemzés* bővítmény aktiválásához ezt válasszuk: *Analysis ToolPak*, majd kattintsunk az OK gombra.
4. Ezután az *Adatok* fülön megjelenik az *Adatelemzés* lehetőség, amelyre kattintva számos lehetőséget találunk, köztük a *Leíró statisztikát*.

2, A táblázatba földrengések gyakorisága magnitúdó szerint.⁹⁴

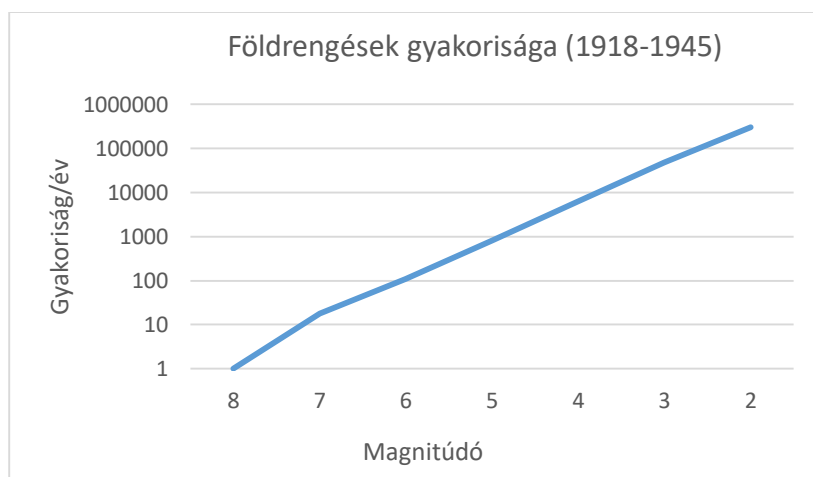
Nagyság (M)	Gyakoriság/év (L), 1918-1945
8	1
7	18
6	108
5	800
4	6200
3	49000
2	300000

Ábrázoljuk az adatokat a) lineáris, illetve b) logaritmikus skálán!

a) lineáris skála



b) logaritmikus skála az y tengelyen



⁹⁴ forrás: Palmer, 2014.

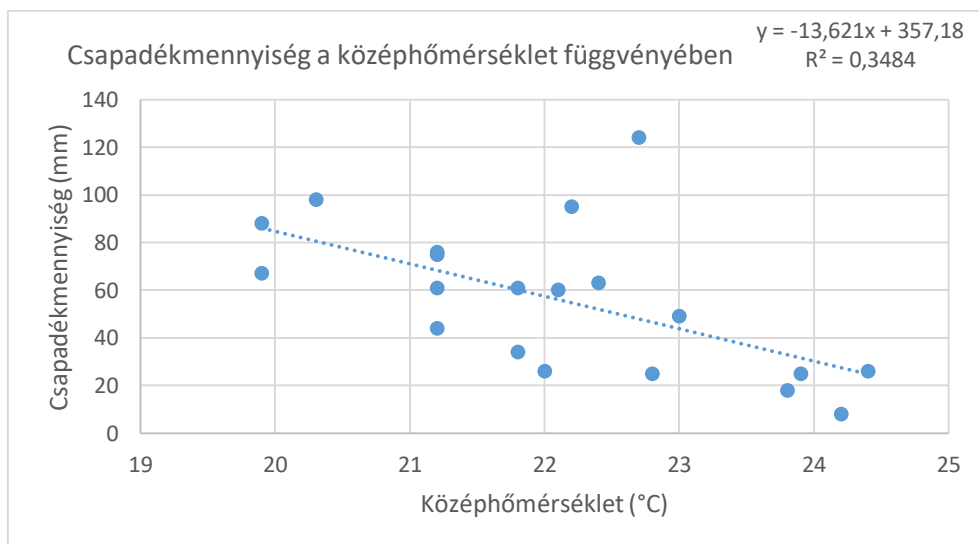
3, Korrelációs együttható és regressziós egyenes

Az alábbi táblázat a július havi csapadékösszeget és a középhőmérsékletet tartalmazza.

- Vizsgáljuk meg e két mennyiség közötti kapcsolatot egy nyári hónapban.
- Határozzuk meg a korrelációs együtthatót és a regressziós egyenes egyenletét!
- Mennyi lenne a várható csapadékmennyiség 21 °C átlaghőmérséklet esetén?
- Határozzuk meg a hőmérséklet adatok mediánját.

Év	t (°C)	csap. (mm)
1941	24,2	8
1942	23,8	18
1943	22,8	25
1944	23,9	25
1945	22	26
1946	24,4	26
1947	21,8	34
1948	21,2	44
1949	23	49
1950	22,1	60
1951	21,2	61
1952	21,8	61
1953	22,4	63
1954	19,9	67
1955	21,2	75
1956	21,2	76
1957	19,9	88
1958	22,2	95
1959	20,3	98
1960	22,7	124

a) és b)



Excelben a korrelációs együttható meghatározása a KORREL függvénnyel: -0,59

Ez alapján a két változó között közepes erősségű, negatív irányú kapcsolat van. (Fontos megjegyezni, hogy a negatív előjel nem a kapcsolat erősségét, hanem az irányát mutatja meg.) Tehát a középhőmérséklet pozitív irányú változása a csapadékmennyiség negatív irányú változását eredményezi (inverz kapcsolat van a két változó között).

c)

Ha az átlaghőmérséklet 21 °C, akkor az ehhez tartozó csapadékmennyiség a regressziós egyenes egyenletéből számítható ki (a két változó között lineáris kapcsolatot feltételezve):

$$y = -13,621 \cdot x + 357,18$$

Ha tudjuk, hogy a független változó, tehát $x = 21$, akkor az ehhez tartozó y érték (csapadékmennyiség):

$$y = -13,621 \cdot 21 + 357,18 = 71,139 \text{ mm}$$

megjegyzés: a regressziós egyenlet csak az x értékek értelmezési tartományán alkalmazható, illetve csak a két változó közötti szoros kapcsolat esetén ad megfelelő becslést. Extrapolációra nem alkalmazható. Ajánlott legalább 10 adatból számolni korrelációs kapcsolatot.

d)

medián: Excelben a MEDIÁN függvénnyel: 22,05

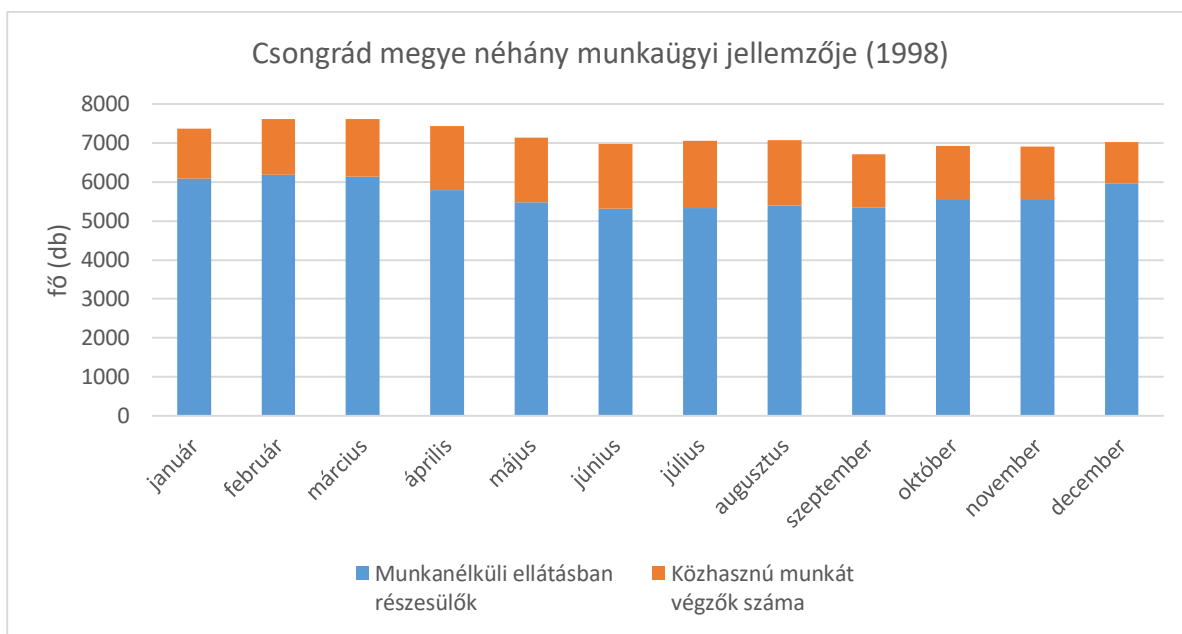
4, Az alábbi táblázat Csongrád megye néhány munkaügyi jellemzőjét tartalmazza (1998-as adat).⁹⁵

Ábrázoljuk az adatokat többféleképpen!

Időszak	Munkanélküli ellátásban részesülők	Közhasznú munkát végzők száma
január	6095	1278
február	6191	1429
március	6133	1483
április	5799	1646
május	5486	1658
június	5318	1664
július	5341	1721
augusztus	5394	1689
szeptember	5346	1362
október	5557	1373
november	5564	1344
december	5956	1066

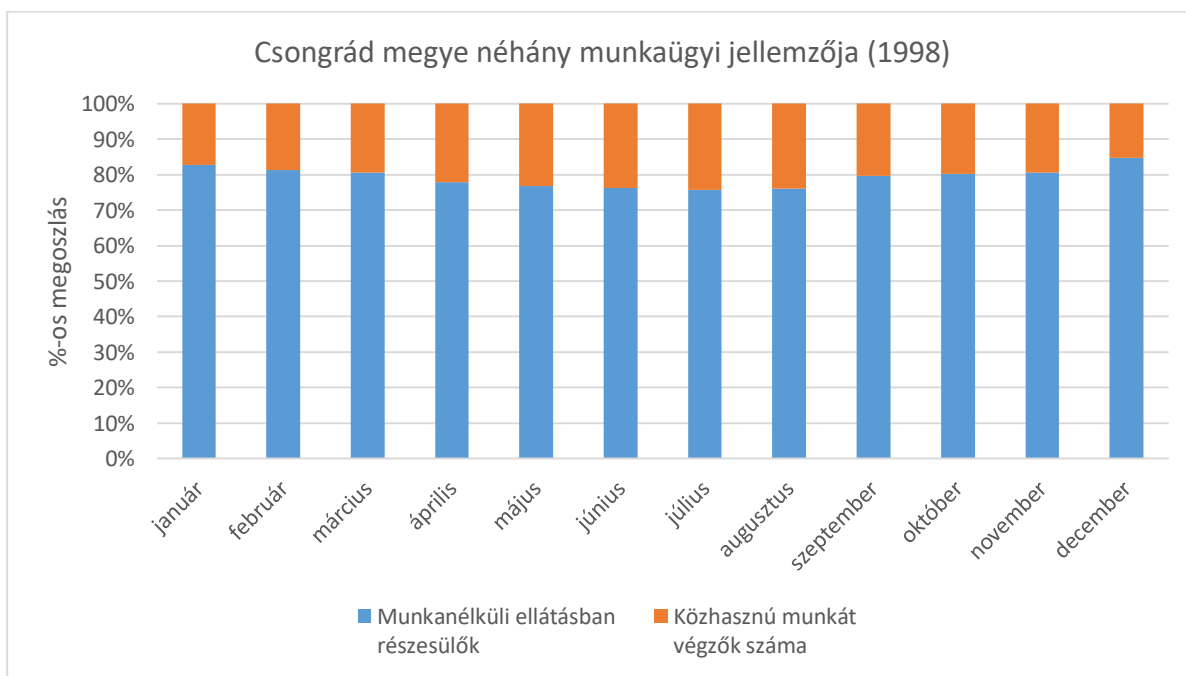
⁹⁵ forrás: Abonyiné, 1999

Halmazott oszlop:



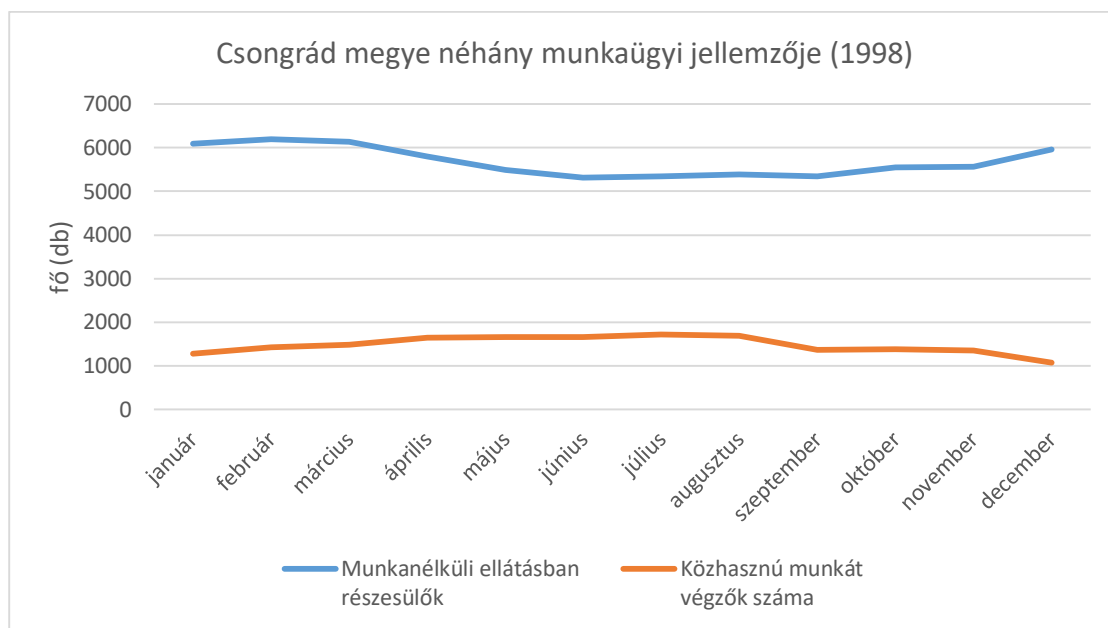
Előnye: az y tengelyen a darabszámok szerepelnek, így leolvasható a közelítő érték. A maximum értékek is változnak idővel, így látható az abszolút csökkenés/növekedés.

100%-ig halmazott oszlop:



Előnye: a maximum értékhez képesti százalékos eloszlás változik, a maximum mindig az adott hónapra jellemző érték. Így nem olvashatók le pontosan az értékek, de a %-os megoszlás változása igen.

Vonaldiagram:



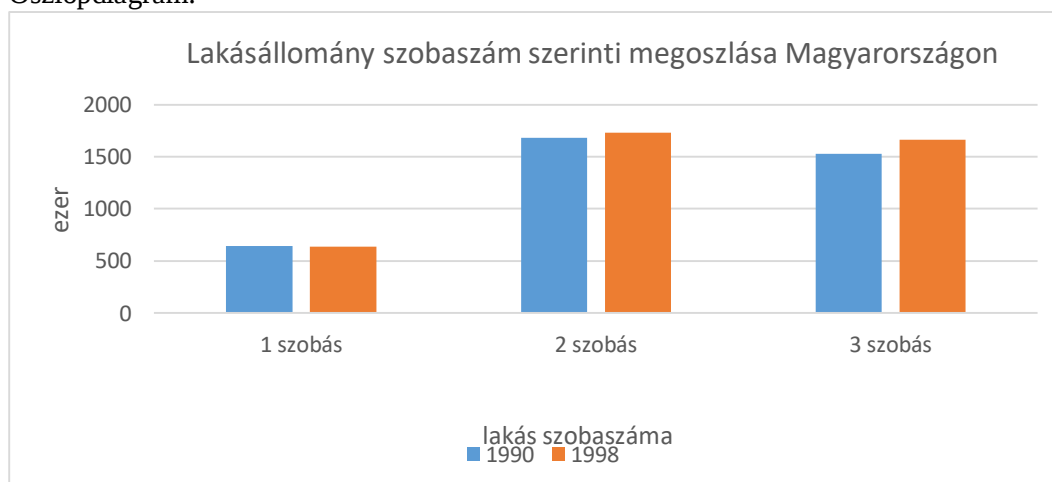
Előnye: az időbeli változás tendenciája könnyebben követhető, illetve látható a változók értékei közötti különbség.

5, Magyarország lakásállományának szobaszám szerinti megoszlása 1990-ben és 1998-ban (ezer).⁹⁶

Ábrázoljuk az adatokat többféleképpen!

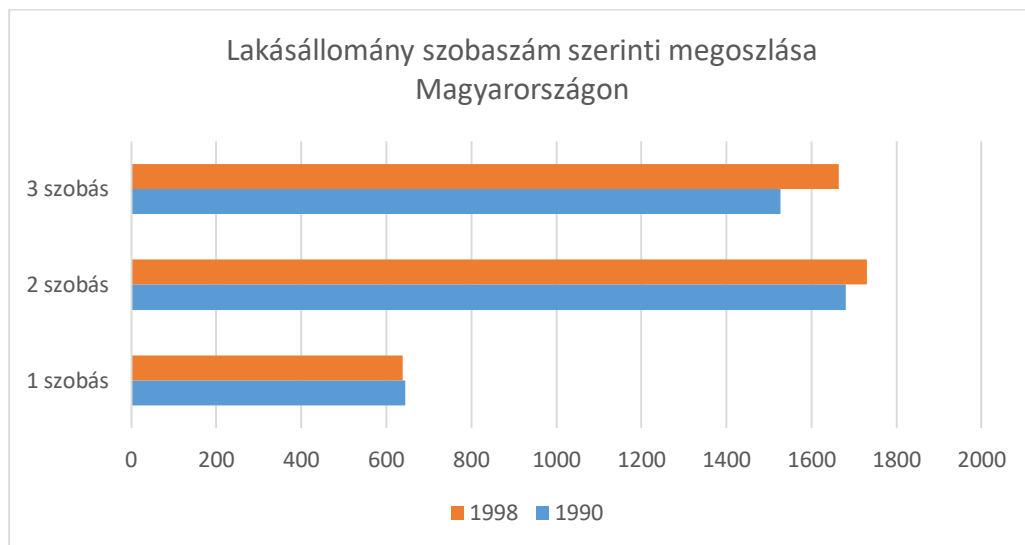
Megnevezés	1990	1998
1 szobás	645	639
2 szobás	1681	1730
3 szobás	1527	1664
összesen	3853	4033

Oszlopdiagram:

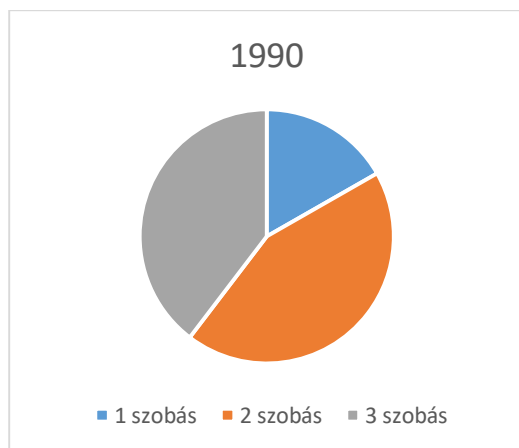


⁹⁶ forrás: Abonyiné, 1999

Szalagdiagram:



Kördiagram:



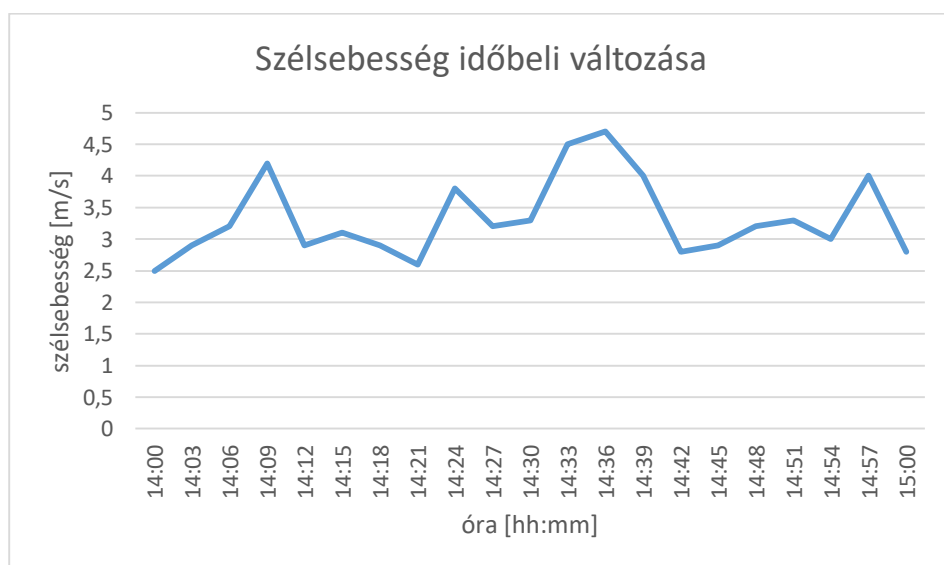
6, Egy meteorológiai állomáson 3 percenként mértek szélsébséget. Az alábbi adatsor a 14 és 15 óra között mért értékeket tartalmazza.

Ábrázoljuk többféleképpen az értékeket!

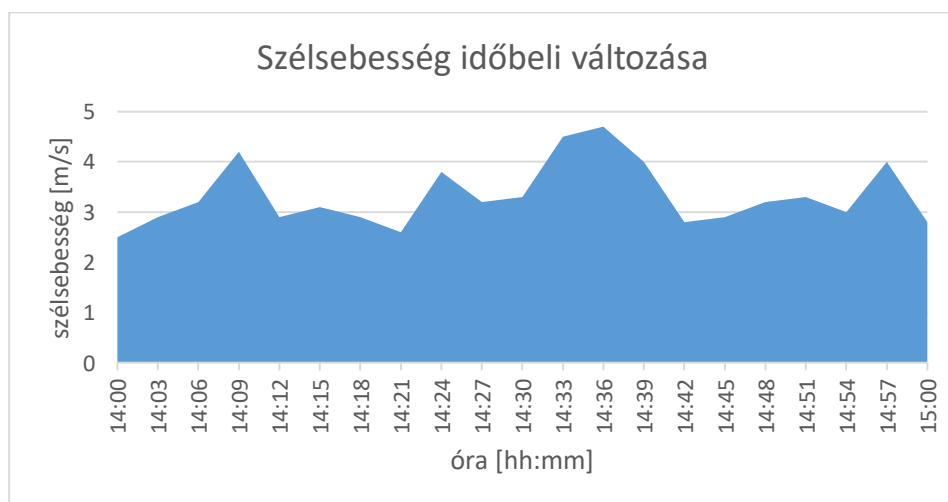
14:00	2,5
14:03	2,9
14:06	3,2
14:09	4,2
14:12	2,9
14:15	3,1
14:18	2,9
14:21	2,6
14:24	3,8

14:27	3,2
14:30	3,3
14:33	4,5
14:36	4,7
14:39	4
14:42	2,8
14:45	2,9
14:48	3,2
14:51	3,3
14:54	3
14:57	4
15:00	2,8

Vonaldiagram:



Terület:

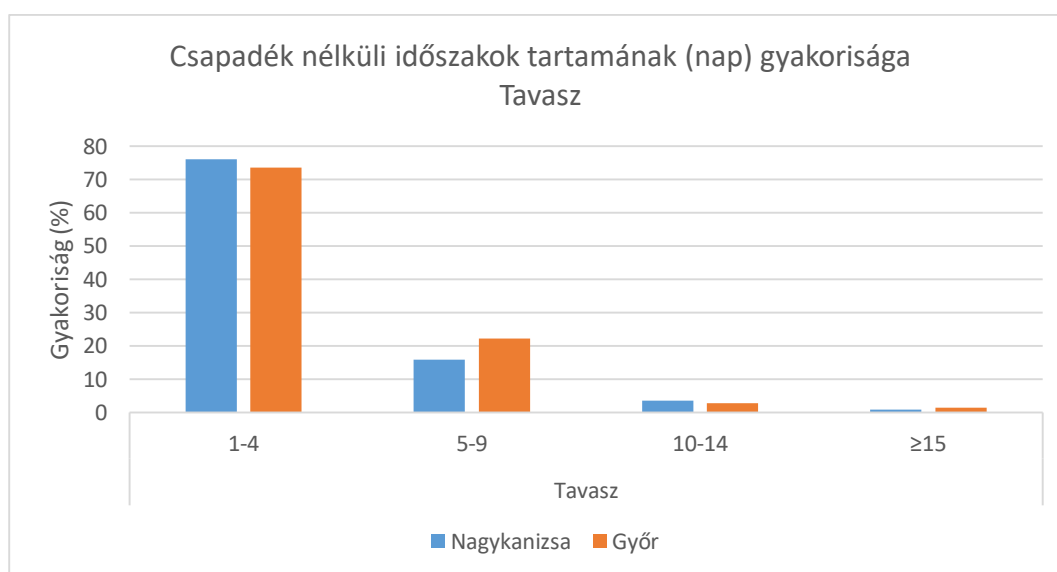
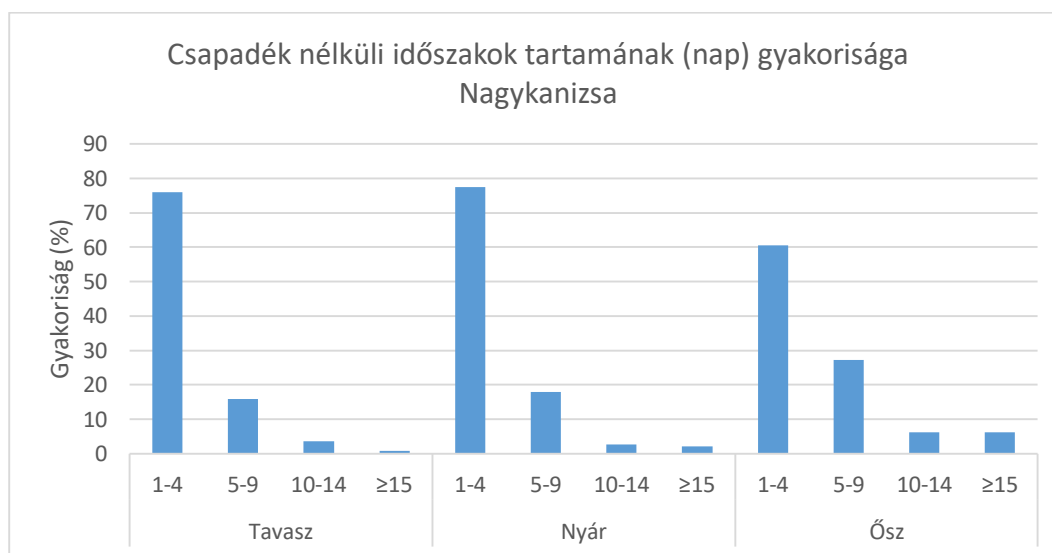


7, Csapadék nélküli időszakok tartamának (nap) gyakorisága (%).⁹⁷

Ábrázoljuk többféleképpen!

Állomás	Tavasz				Nyár				Ősz			
	1-4	5-9	10-14	≥15	1-4	5-9	10-14	≥15	1-4	5-9	10-14	≥15
Nagykanizsa	76	15,8	3,5	0,7	77,5	17,9	2,6	2	60,5	27,2	6,1	6,2
Győr	73,5	22,2	2,8	1,4	75,1	18,3	3,7	2,9	70,8	17,4	7,9	3,9
Pécs	78,8	16	3,8	1,4	72,9	22,6	2,6	1,9	64,4	20,8	7,8	7
Tokaj	71,1	22,3	2,2	4,4	72,1	22,8	3,7	1,4	63,1	20,7	10,8	5,4
Kiskunhalas	73,7	19,7	3,3	3,3	70,4	22,3	5,3	2	62,6	28,2	9,1	10,1
Nyíregyháza	70,3	23,6	4,1	2	72,1	23,3	3,3	1,3	62,1	25	7,8	4,3
Debrecen	73,3	20,6	3,4	2,7	75,5	19,9	3,3	1,3	62,4	15,4	18,8	3,4
Püspökladány	70,2	21,3	5	3,5	69,4	20,4	7,3	2,9	60,8	19,6	15	4,6
Túrkeve	69,5	23,4	5	2,1	74,4	17,3	3,5	2,8	56,8	25	11,5	6,7
Szeged	79,8	13,9	3,2	3,1	64,4	26	6,9	2,7	59,9	21,4	11,6	7,1

Csoportosított oszlopok:



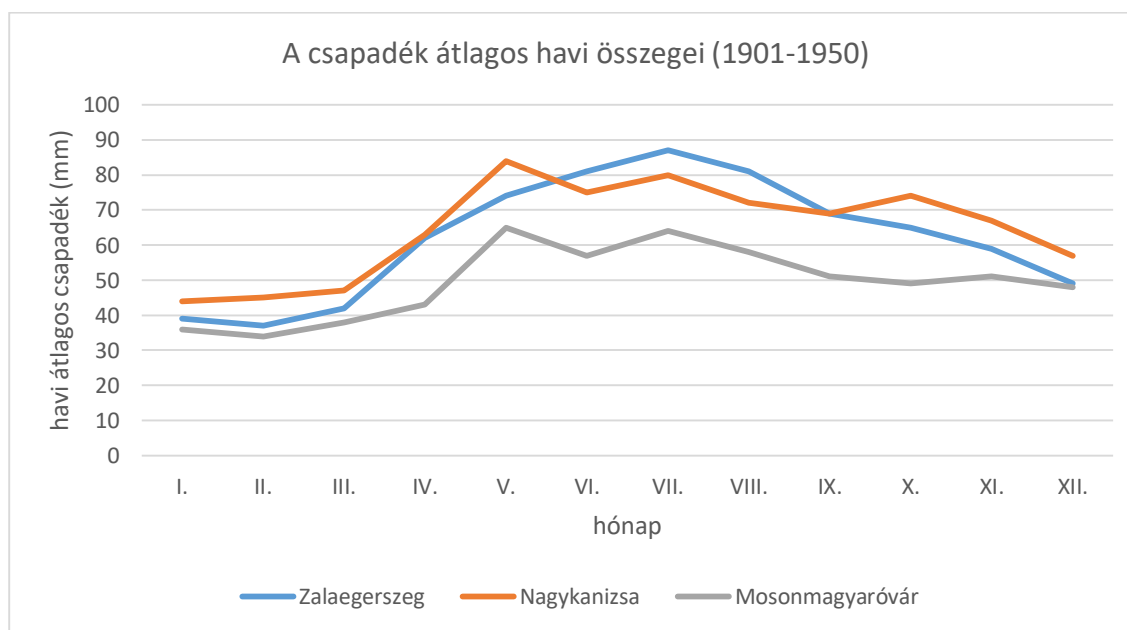
⁹⁷ forrás: www.tankonyvtar.hu

8, A csapadék átlagos havi összegei Magyarországon [mm] (1901-1950).⁹⁸

Ábrázoljuk többféleképpen!

Hely	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
Zalaegerszeg	39	37	42	62	74	81	87	81	69	65	59	49
Nagykanizsa	44	45	47	63	84	75	80	72	69	74	67	57
Mosonmagyaróvár	36	34	38	43	65	57	64	58	51	49	51	48
Kaposvár	42	41	44	59	77	76	66	63	61	72	64	50
Pécs	38	39	44	63	67	64	58	56	54	66	67	45
Budapest	39	39	43	52	69	67	50	48	45	54	61	50
Vác	34	32	37	43	61	58	48	47	40	49	53	44
Kecskemét	26	29	32	45	56	55	48	45	46	48	50	37
Szeged	32	34	38	49	61	68	51	48	47	52	52	41
Miskolc	31	32	34	45	69	84	65	59	54	52	58	42
Békéscsaba	32	30	35	48	60	71	57	50	44	49	49	40
Debrecen	32	32	34	45	60	69	61	61	46	53	51	41
Nyíregyháza	29	30	32	44	61	70	64	68	46	51	50	38

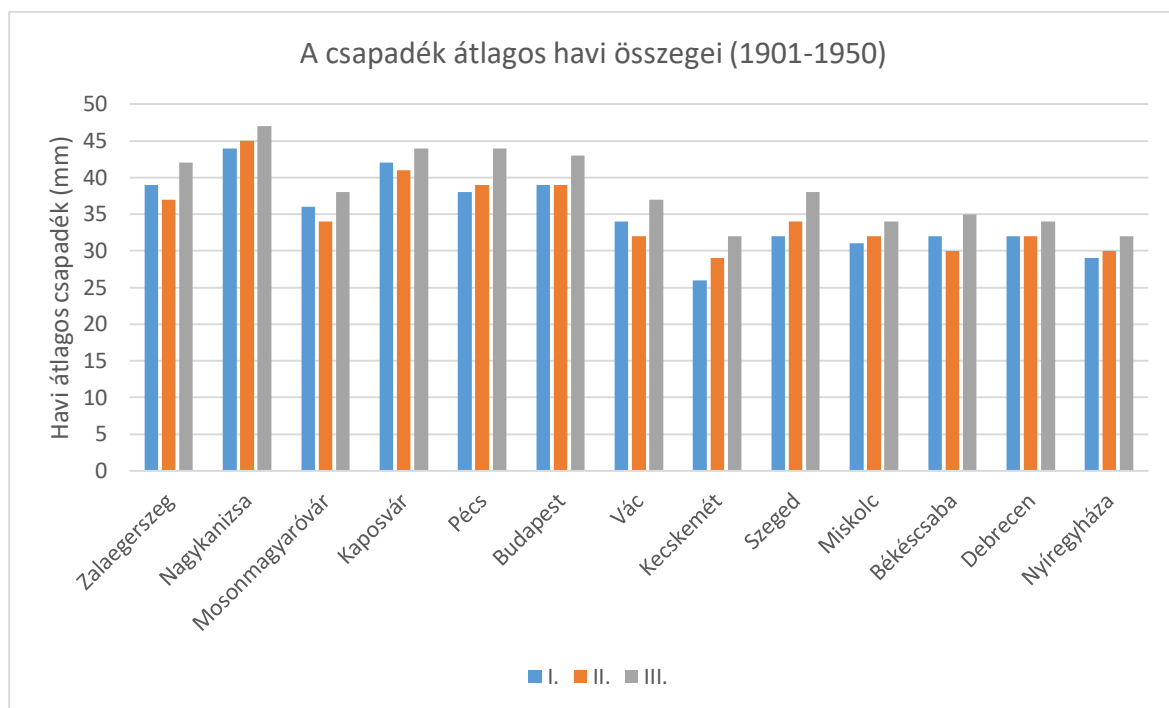
Vonaldiagram:



Előnye: időbeli tendencia látható, illetve több adatsor összehasonlítására is van lehetőség.

⁹⁸ forrás: www.tankonyvtar.hu

Csoportosított oszlop:



Előnye: a helyszínek és a kiválasztott hónapok közti különbségek is láthatók.

Megjegyzés: ne ábrázoljunk egyszerre túl sok adatot, mert értelmezhetetlenné válik a diagram.

9, Empirikus sűrűségfüggvény és empirikus eloszlásfüggvény készítése I.

A táblázat Január havi csapadékösszegeket tartalmaz Budapest esetén (mm-ben).

Az adatsorból készítsünk hisztogramot 15 mm-es intervallum szélességgel! Az első intervallum kezdődjön 10 mm-nél.

Készítsünk empirikus eloszlásfüggvényt! Az első határ legyen 10 mm és 15 mm-enként haladjunk!

Határozzuk meg az eloszlás móduszát!

év	csapadék
1940	59
1941	50
1942	55
1943	39
1944	22
1945	98
1946	35
1947	35
1948	70
1949	17
1950	18

1951	24
1952	58
1953	67
1954	50
1955	58
1956	26
1957	21
1958	71
1959	47
1960	25

Növekvő sorrendbe rendezett csapadék adatok:

év	csapadék
1949	17
1950	18
1957	21
1944	22
1951	24
1960	25
1956	26
1946	35
1947	35
1943	39
1959	47
1941	50
1954	50
1942	55
1952	58
1955	58
1940	59
1953	67
1948	70
1958	71
1945	98

n (elemszám) = 21

1. hisztogram (empirikus sűrűségfüggvény)

készítésének lépései:

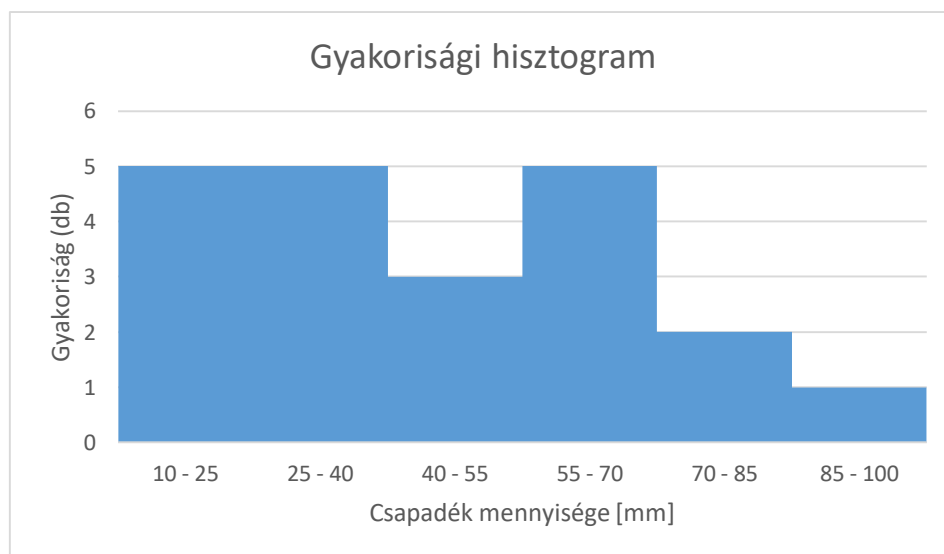
- intervallumok meghatározása
- intervallumokba eső darabszámok meghatározása. Feltétel: $x_1 \leq x < x_2$, ami azt jelenti, hogy az alsó intervallumhatárral lehet egyenlő az érték, a felsővel nem.
- k/n relatív gyakoriságok képzése, ahol k az intervallumba eső darabszám, n pedig az összes elemszám
- $k/(n \cdot \Delta)$ értékek meghatározása, ahol Δ az intervallum szélessége, k és n a relatív gyakoriságnál ismertettek
-

intervallumok	k (db)	k/n	k/(n·d _i)
10 - 25	5	5/21 = 0,238095	5/(21·15) = 0,01587302
25 - 40	5	5/21 = 0,238095	5/(21·15) = 0,01587302
40 - 55	3	3/21 = 0,142857	3/(21·15) = 0,00952381
55 - 70	5	5/21 = 0,238095	5/(21·15) = 0,01587302
70 - 85	2	2/21 = 0,095238	2/(21·15) = 0,00634921
85 - 100	1	1/21 = 0,047619	1/(21·15) = 0,0031746

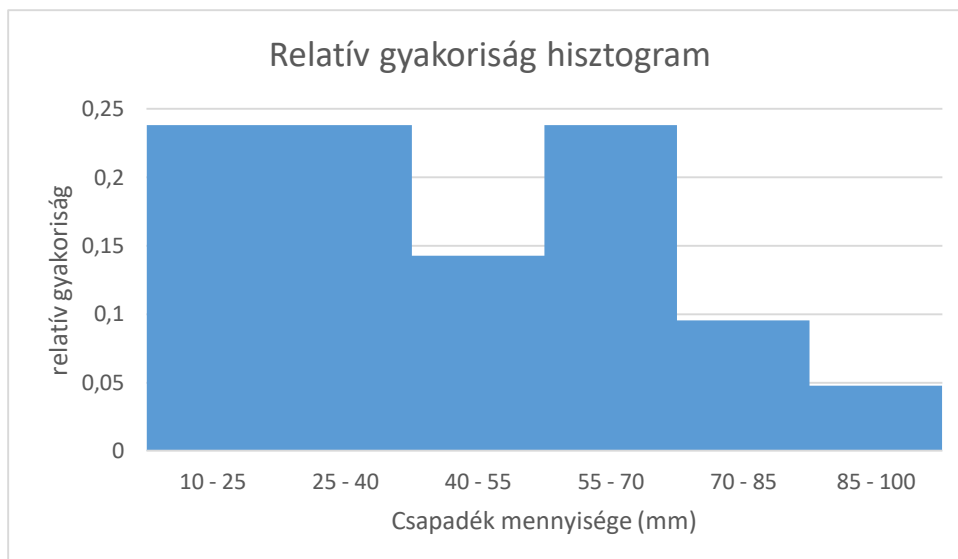
minden intervallum szélessége ugyanaz, így d_i minden esetben 15

$n = 21$

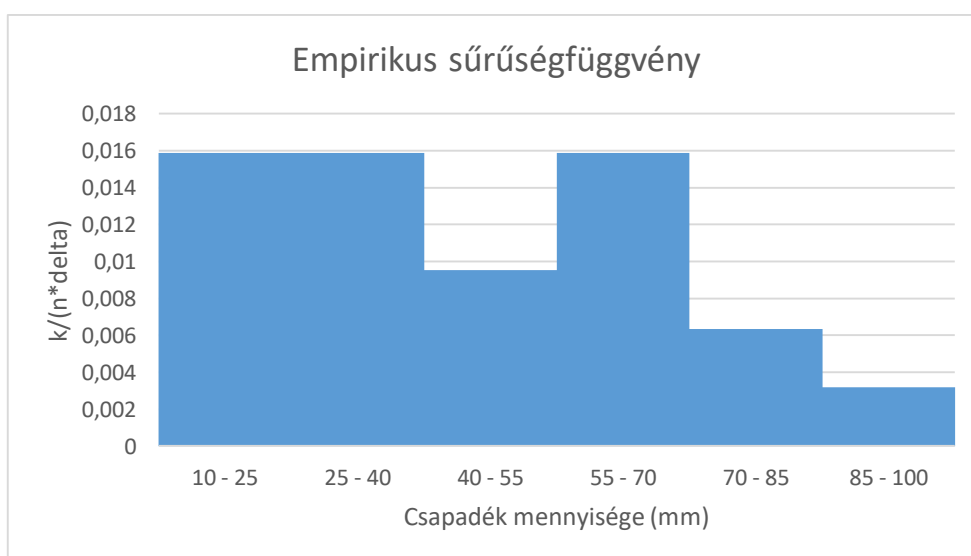
Megjegyzés: Excelben az egyes intervallumokba eső darabszámok (k) kiszámolhatók a DARABHATÖBB függvénnyel.



Megjegyzés: az y tengelyen az egyes intervallumokba eső darabszámok láthatók. Ha összeadjuk ezeket a darabszámokat, megkapjuk az összes elemszámot.



Megjegyzés: itt az y tengelyen szereplő relatív gyakoriság értékeket lehet %-ban is szerepeltetni. A relatív gyakoriság értékek összege 1. A relatív gyakoriság megadja az egyes intervallumokba esés valószínűségét.



Megjegyzés: az empirikus sűrűségfüggvény az intervallum szélességgel normált értékeket mutatja. Mivel ebben a feladatban egyenlő intervallumszélességekkel dolgoztunk, így a relatív gyakoriság, illetve az empirikus sűrűségfüggvény megjelenésükben nem különböznek, az y tengelyen lévő értékek azonban igen. Egyenlő intervallumszélességek esetében az empirikus eloszlásfüggvény kevésbé informatív, mint a relatív gyakoriság hisztogram.

2. Empirikus eloszlásfüggvény készítése

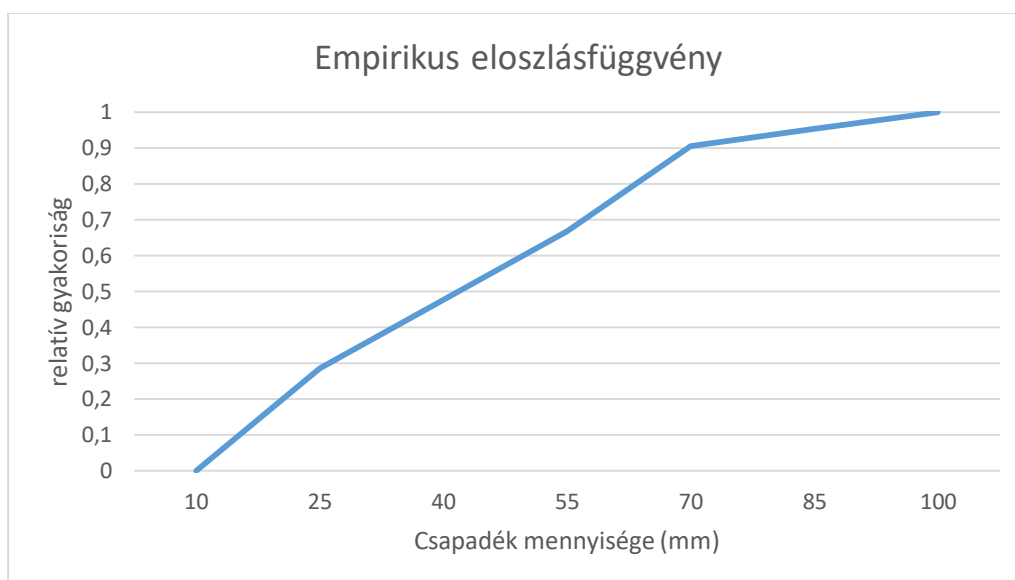
készítésének lépései:

- x_a értékek meghatározása az intervallumok határai alapján.
- az adott x_a értéknél kisebb, vagy egyenlő értékek darabszámának meghatározása (k)

- k/n relatív gyakoriságok képzése minden x_a értékhez. A legutolsó érték mindig 1 (ez jelenti a 100%-ot, tehát minden értékünk ez alatt található).

x_a	k (db)	k/n
10	0	$0/21 = 0$
25	6	$6/21 = 0,285714$
40	10	$10/21 = 0,47619$
55	14	$14/21 = 0,666667$
70	19	$19/21 = 0,904762$
85	20	$20/21 = 0,952381$
100	21	$21/21 = 1$

Megjegyzés: Excelben az adott x_a értéknél kisebb adatok darabszámát (k) a DARABTELI függvénnyel lehet megszámlálni.



10, Empirikus sűrűségfüggvény és empirikus eloszlásfüggvény készítése II.

Az alábbi táblázat egy szitálás eredményeit tartalmazza. Készítsünk az adatokból empirikus sűrűségfüggvényt és empirikus eloszlásfüggvényt!

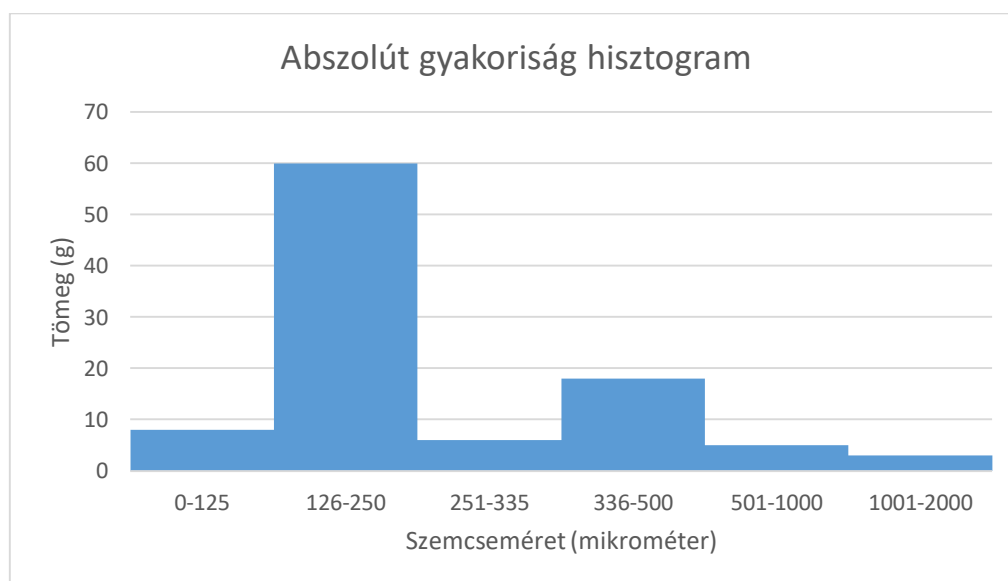
Szitaméret (mikrométer)	Fennmaradt mennyiség (g)
2000	0
1000	3
500	5
335	18
250	6
125	60
Gyűjtőtál	8

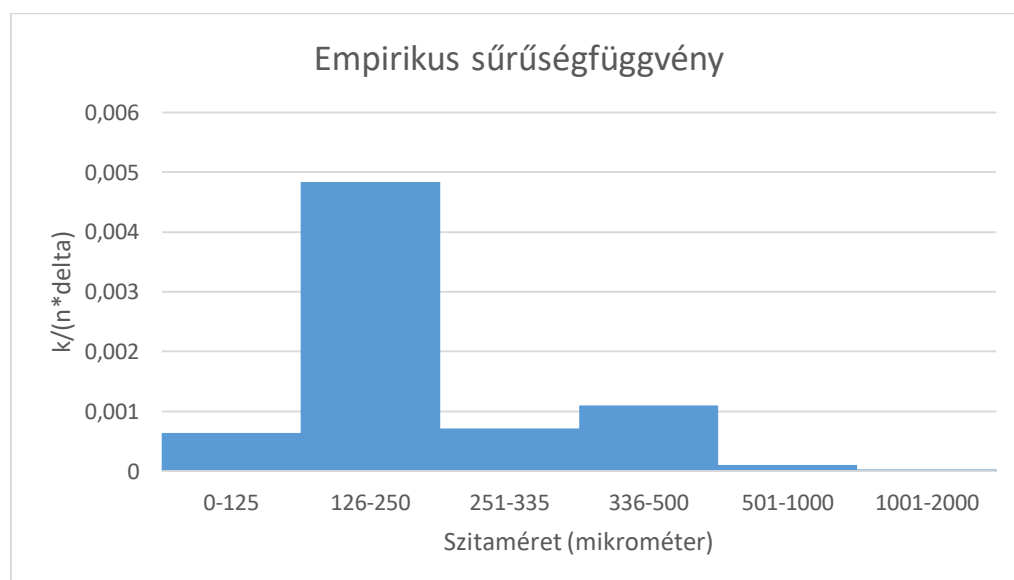
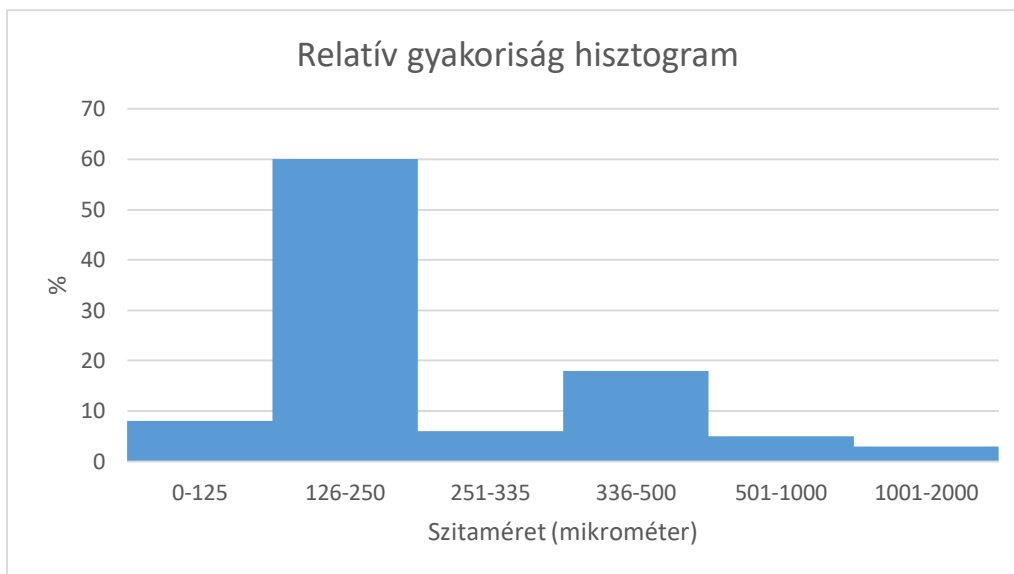
1. Empirikus sűrűségfüggvény készítése

Látható, hogy az adatok nem azonos intervallumokba vannak osztva (a szitaméter tartományok jelentik az intervallumhatárokat). A táblázatban láthatóak az adatsor alapján kigyűjtött intervallum szélességek (d_i):

intervallum	tömeg	k/n	%	d_i	$k/(n \cdot d_i)$
0-125	8	0,08	8	125	0,00064
126-250	60	0,6	60	124	0,0048387
251-335	6	0,06	6	84	0,0007143
336-500	18	0,18	18	164	0,0010976
501-1000	5	0,05	5	499	0,0001002
1001-2000	3	0,03	3	999	$3,003 \cdot 10^{-5}$
2000-	0	0	0		0
összesen	100				

Az adatok ábrázolása:

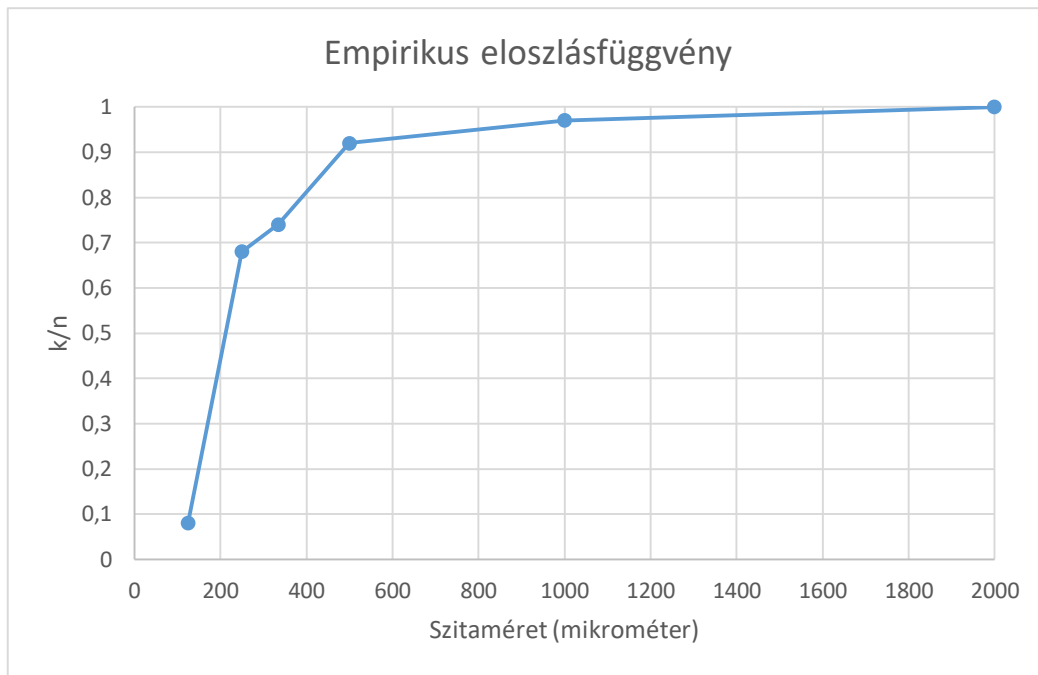




Megjegyzés: látható, hogy az első két ábrához képest az empirikus sűrűségfüggvény különböző, mivel ezek az értékek az intervallumszélességgel leosztottak. Mivel az intervallumok szélessége különböző volt az adatsorban, így az empirikus sűrűségfüggvény képzésével láthatóvá válik az egyenlő intervallumhosszra eső darabszám és az oszlopok egymáshoz képesti tényleges magassága.

2. Empirikus eloszlásfüggvény készítése

x_a	k (db)	k/n
125	8	0,08
250	68	0,68
335	74	0,74
500	92	0,92
1000	97	0,97
2000	100	1
összesen	100	



Szempontrendszer adatsor elemzéshez

Megjegyzés: a szempontrendszer a Matematikai összefüggések és adatelemzési módszerek a földrajzban és a földtudományban c. kurzushoz lett kialakítva, de általánosságban is alkalmazható a földrajz, földtudomány területén történő alapvető adatelemzéshez.

1. Adatsor kiválasztása
 - a. az adatsor bármely, a földrajz és földtudomány szakterületeket érintő témához kapcsolódhat
 - b. tartalmazhat idősoros, területi, vagy bármely más szempont szerinti adatokat
 - c. legyen célja a kiválasztásnak, tehát fontos meghatározni, hogy miért arra az adatsorra került a választás

2. Adatsor letöltése
 - a. ellenőrizzük, hogy milyen formátumban tölthető le az adatsor
 - b. az adatsor forrásánál sokszor meg van adva, hogy melyik adat mit jelent (tehát hogyan kell értelmeznünk a letöltött adatokat, illetve ha van a fájlnak valamilyen struktúrája, akkor hogy azt hogyan értelmezendő) – ezt vegyük mindig figyelembe

3. Adatok elemzése
 - a. ellenőrizzük az adatok struktúráját
 - i. miként lehet beolvasni az adatokat (irányított beillesztés, elválasztók stb.), hogyan vannak kiírva az adatok (oszlopokba, sorokba stb.)
 - ii. milyen az adatok időbeli/térbeli felbontása
 - iii. milyen változók szerepelnek az adatsorban (pl. hőmérséklet, csapadék stb.)
 - b. ellenőrizzük, hogy van-e az adatok között hibás adat (pl. hibás karakterek)
 - c. ha szükséges, tördeljük az adatokat kisebb részekre (pl. különböző típusú változókat külön is vizsgálhatunk).

- d. fontos, hogy ábrázoljuk a nyers adatokat. Ebből már látható lesz valamilyen struktúra.
 - e. leíró statisztika
 - i. számtani átlag
 - ii. módusz
 - iii. medián
 - iv. korrigált empirikus szórás
 - v. terjedelem, relatív terjedelem
 - vi. alsó- és felső kvartilis
 - vii. kiugró értékek
 - viii. átlagos abszolút eltérés
 - ix. variancia
 - x. ha valamilyen tendenciát leíró adatsorról van szó (tehát van növekedés vagy csökkenés az adatokban), akkor lehet átlagos abszolút változást és átlagos relatív változást is számolni
 - f. mozgó átlag
 - g. normalitás vizsgálat, korreláció
4. Adatok ábrázolása
- a. megfelelő diagramtípus választása a különböző adatokhoz
 - b. trendvonal felvétele, egyenes egyenletének szerepeltetése (amennyiben lehetséges/olyan típusú a vizsgálat)
 - c. amely változóknál lehet, ott empirikus sűrűségfüggvény (hisztogram) készítése.
 - d. ha területi adatokról van szó, akkor lehetőség szerint térképes ábrázolás.
5. Összegzés
- a. szövegesen összefoglalni, hogy mi az elemzés konklúziója

Források

Dr. Abonyiné Dr. Palotás J. (1999). *Általános statisztika alkalmazása a társadalmi-gazdasági földrajzban*. JATEPress, Szeged

Geiger J. (2012). *Geomatematika*. JATEPress

Geresdi I. & Bugya T. (2005). *Geostatisztika példatár*. Egyetemi jegyzet, PTE TTK

http://foldrajz.ttk.pte.hu/files/doktori-iskola/dokumentumok/geostatisztikai_peldatar_2008.pdf

Hajnal I. (1987). *Matematika I*. Nemzeti Tankönyvkiadó. Budapest

Lóki J. & Demeter G. (2009). *Geomatematika*. Egyetemi jegyzet Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen

Telbisz T., Szabó P. & Szalai Z. (2013). *Matematika a földrajzban. Útmutató és feladatgyűjtemény földrajzos hallgatók részére*. ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet, Földrajztudományi Központ, Budapest. ISBN 978-963-284-417-6

http://tef.elte.hu/phocadownload/Telbisz_Szabo_Szalai_MatematikaAFoldrajzban.pdf

Az ábrák forrásai

1. ábra. Forrás: Trócsányi A. (2010). *A kultúrgeográfia alapjai*. In: Tóth J. (szerk.): Világföldrajz. Akadémiai Kiadó, Budapest, pp. 619-645.

2. ábra. Forrás: Pirisi G., Trócsányi A. & Hajnal K.: *Általános társadalom- és gazdaságföldrajz*. Jegyzet.

[Általános társadalom- és gazdaságföldrajz \(pte.hu\)](#)

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

3. ábra. Forrás: [Meteorológiai alapismeretek | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](#)

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

4. ábra. Forrás: [Természettudomány 5. \(NAT2020\) - VI. Tájékozódás a térben - 1. A térkép \(nkp.hu\)](#)

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

5. ábra. Forrás: [R Scatter Plot - Base Graph - Learn By Example](#)

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

6. ábra. Forrás: [Adatok gyűjtésének és értékelésének módszerei | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](#)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2010-0012_adatok_gyujtese/ch10.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

7. ábra. Forrás: [OTP Privátbank - Hírek részletes \(otpbank.hu\)](#)

<https://www.otpbank.hu/privatebanking/Hir?id=37838>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

8. ábra. Forrás: <https://slideplayer.hu/slide/2041087/>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

9. ábra. Forrás: <https://www.agrarszektor.hu/europai-unio/eu-a-gazdasagok-ketharmada-a-ferfiak-kezeben-van.13081.html>

[EU: a gazdaságok kétharmada a férfiak kezében van | Agrárium, mezőgazdaság és élelmiszeripar \(agrarszektor.hu\)](https://www.agrarszektor.hu/europai-unio/eu-a-gazdasagok-ketharmada-a-ferfiak-kezeben-van.13081.html)

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

10. ábra. Forrás: [Budapest - Városok éghajlati jellemzői - met.hu](https://www.met.hu/eghajlat/magyarorszag_eghajlata/varosok_jellemzoi/Budapest/)

https://www.met.hu/eghajlat/magyarorszag_eghajlata/varosok_jellemzoi/Budapest/

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

11. ábra. Forrás: [A vidéki megélhetés egyik alapvető forrása ma is a mezőgazdaság - Agro Napló - A mezőgazdasági hírportál \(agronaplo.hu\)](https://www.agronaplo.hu/szakfolyoirat/2017/04/gazdasag-a-videki-megelhetes-egyik-alapveto-forrasa-ma-is-a-mezogazdasag)

<https://www.agronaplo.hu/szakfolyoirat/2017/04/gazdasag-a-videki-megelhetes-egyik-alapveto-forrasa-ma-is-a-mezogazdasag>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

12. ábra. Forrás: [eXe \(tankonyvtar.hu\)](https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0005_21_szamitogepes_adatfeldolgozas_scorm_10/1042_tbbvltozs_elemzsek_az_adatbzisokban.scorml)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0005_21_szamitogepes_adatfeldolgozas_scorm_10/1042_tbbvltozs_elemzsek_az_adatbzisokban.scorml

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

13. ábra. Forrás: [Ásványvíz fogyasztási adatok | Magyar Ásványvíz, Gyümölcslé és Üdítőital Szövetség \(asvanyvizek.hu\)](https://asvanyvizek.hu/mit-kell-tudni-az-asvanyvizrol/asvanyviz-fogyasztasi-adatok/)

<https://asvanyvizek.hu/mit-kell-tudni-az-asvanyvizrol/asvanyviz-fogyasztasi-adatok/>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

14. ábra. Forrás: [Demográfia | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_547_Demografia/ch02s05.html)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_547_Demografia/ch02s05.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

15. ábra. Forrás: [Statisztika | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_freedman_statisztika/ch03s08.html)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_freedman_statisztika/ch03s08.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

16. ábra. Forrás: [Informatika 7. évfolyam | Sulinet Tudásbázis](https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/informatika/informatika/informatika-7-evfolyam/diagramtipusok/specialis-diagramok)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/informatika/informatika/informatika-7-evfolyam/diagramtipusok/specialis-diagramok>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.07.

17. ábra. Forrás: [Magyar növekedés 5 éve és most - mi változott? - Portfolio.hu](https://www.portfolio.hu/gazdasag/20170914/magyar-novekedes-5-eve-es-most-mi-valtozott-262117#)

<https://www.portfolio.hu/gazdasag/20170914/magyar-novekedes-5-eve-es-most-mi-valtozott-262117#>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.

18. ábra. Forrás: [Budapest - Városok éghajlati jellemzői - met.hu](https://www.met.hu/eghajlat/magyarorszag_eghajlata/varosok_jellemzoi/Budapest/)
https://www.met.hu/eghajlat/magyarorszag_eghajlata/varosok_jellemzoi/Budapest/
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.
19. ábra. Forrás: [MNB: mi kell a demográfiai fordulathoz? - Infostart.hu](https://infostart.hu/gazdasag/2020/05/23/mnb-mi-kell-a-demografiai-fordulathoz)
<https://infostart.hu/gazdasag/2020/05/23/mnb-mi-kell-a-demografiai-fordulathoz>
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.
20. ábra. Forrás: [Excel-kisokos - Diagramok - PC World](https://pcworld.hu/szoftver/excel-kisokos-diagramok-106257.html)
<https://pcworld.hu/szoftver/excel-kisokos-diagramok-106257.html>
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.
21. ábra. Forrás: [Az Office-ban rendelkezésre álló diagramtípusok - Office-támogatás \(microsoft.com\)](https://support.microsoft.com/hu-hu/office/az-office-ban-rendelkez%C3%A9sre-%C3%A1ll%C3%B3-diagramt%C3%ADpusok-a6187218-807e-4103-9e0a-27cdb19afb90)
<https://support.microsoft.com/hu-hu/office/az-office-ban-rendelkez%C3%A9sre-%C3%A1ll%C3%B3-diagramt%C3%ADpusok-a6187218-807e-4103-9e0a-27cdb19afb90>
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.
22. ábra. Forrás: [Adatok gyűjtésének és értékelésének módszerei | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2010-0012_adatok_gyujtese/ch10.html)
https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2010-0012_adatok_gyujtese/ch10.html
23. ábra. Forrás: [- 1 - Tartalomjegyzék - PDF Free Download \(docplayer.hu\)](https://docplayer.hu/104945398-1-tartalomjegyzek.html)
<https://docplayer.hu/104945398-1-tartalomjegyzek.html>
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.
24. ábra. Forrás: [File:Vallási összetétel Budapest 2011.svg - Wikimedia Commons](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vall%C3%A1si_%C3%B6sszet%C3%A9tel_Budapest_2011.svg)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vall%C3%A1si_%C3%B6sszet%C3%A9tel_Budapest_2011.svg
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.03.
25. ábra. Forrás: [Turizmus Online - A külföldi utak negyedét szervezték utazási irodán keresztül a magyarok](http://turizmusonline.hu/belfold/cikk/a_kulfoldi_utak_negyedet_szerveztek_utazasi_irodan_keresztul_a_magyarok)
http://turizmusonline.hu/belfold/cikk/a_kulfoldi_utak_negyedet_szerveztek_utazasi_irodan_keresztul_a_magyarok
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.
26. ábra. Forrás: [STATISZTIKA. módszerek. szló, Michael Friendly - PDF Ingyenes letöltés \(docplayer.hu\)](https://docplayer.hu/191753631-Statiztika-modszerek-szlo-michael-friendly.html)
<https://docplayer.hu/191753631-Statiztika-modszerek-szlo-michael-friendly.html>
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.
27. ábra. Forrás: [358 matematika megoldas 1.pdf \(zanza.tv\)](https://zanza.tv/sites/default/files/358_matematika_megoldas_1.pdf)
https://zanza.tv/sites/default/files/358_matematika_megoldas_1.pdf

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

28. ábra. Forrás: [Magyarország települései jogállás szerint – Földrajzi függelék \(foldrajzmagazin.hu\)](https://fuggelek.foldrajzmagazin.hu/magyarorszag/magyarorszag-telepulesei-jogallas-szerint/)

<https://fuggelek.foldrajzmagazin.hu/magyarorszag/magyarorszag-telepulesei-jogallas-szerint/>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

29. ábra. Forrás: [A munkaerő-tartalék is csökken Magyarországon | KamaraOnline](https://kamaraonline.hu/a-munkaero-tartalek-is-csokken-magyarorszagon/)

<https://kamaraonline.hu/a-munkaero-tartalek-is-csokken-magyarorszagon/>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

30. ábra. Forrás: [Ezt hozta az új törvény - Kettészakadt a magyar földpiac | Agrárium, mezőgazdaság és élelmiszeripar \(agrarszektor.hu\)](https://www.agrarszektor.hu/fold/ezt-hozta-az-uj-torveny-ketteszakadt-a-magyar-foldpiac.5000.html)

<https://www.agrarszektor.hu/fold/ezt-hozta-az-uj-torveny-ketteszakadt-a-magyar-foldpiac.5000.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

31. ábra. Forrás: [Sokkoló árak: tíz év alatt háromszorosára drágult a szántóföld Magyarországon | Agrárium, mezőgazdaság és élelmiszeripar \(agrarszektor.hu\)](https://www.agrarszektor.hu/fold/sokkolo-arak-tiz-ev-alatt-haromszorosara-dragult-a-szantofold-magyarorszagon.22342.html)

<https://www.agrarszektor.hu/fold/sokkolo-arak-tiz-ev-alatt-haromszorosara-dragult-a-szantofold-magyarorszagon.22342.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

32. ábra. Forrás: [A térinformatika a társadalomtudományban | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0010_2A_16_Csizmady_Adrienne_Terinformatika_a_tarsadalomtudomanyban_cimu_targyhoz_digitalis_tankonyv_fejl/ch04s08.html)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0010_2A_16_Csizmady_Adrienne_Terinformatika_a_tarsadalomtudomanyban_cimu_targyhoz_digitalis_tankonyv_fejl/ch04s08.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

33. ábra. Forrás: [Kullancs-térkép: Melyek a veszélyeztetett területek? \(webbeteg.hu\)](https://www.webbeteg.hu/cikkek/eloskodok/15940/kullancs-terkep-melyek-a-veszelyeztetett-teruletek?)

[https://www.webbeteg.hu/cikkek/eloskodok/15940/kullancs-terkep-melyek-a-veszelyeztetett-teruletek](https://www.webbeteg.hu/cikkek/eloskodok/15940/kullancs-terkep-melyek-a-veszelyeztetett-teruletek?)

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

34. ábra. Forrás: [Régiós szakadékok a foglalkoztatásban \(szakszervezetek.hu\)](https://szakszervezetek.hu/hirek/11767-regios-szakadekok-a-foglalkoztatásban)

<https://szakszervezetek.hu/hirek/11767-regios-szakadekok-a-foglalkoztatásban>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

35. ábra. Forrás: [0027_MSTE1.pdf \(tankonyvtar.hu\)](https://dtk.tankonyvtar.hu/xmlui/bitstream/handle/123456789/7746/0027_MSTE1.pdf?sequence=1&isAllowed=y)

https://dtk.tankonyvtar.hu/xmlui/bitstream/handle/123456789/7746/0027_MSTE1.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

36. ábra. Forrás: [Magyarország népessége régióként | KÖRnyezetvédelmi INFormáció \(enfo.hu\)](https://enfo.hu/node/9324)

<https://enfo.hu/node/9324>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

37. ábra. Forrás: [Továbbra is óriási a szakadék a régiók között \(szakszervezetek.hu\)](https://szakszervezetek.hu)

<https://szakszervezetek.hu/dokumentumok/mibol-elunk/11924-tovabbra-is-oriasi-a-szakadek-a-regiok-kozott>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

38. ábra. Forrás: [Gyümölcstermesztési alapismeretek | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](#)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_521_Gyumolcstermesztési_alapismeretek/ch09.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

39. ábra. Forrás: [Gyümölcstermesztési alapismeretek | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](#)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_521_Gyumolcstermesztési_alapismeretek/ch09.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

40. ábra. Forrás: [Gyümölcstermesztési alapismeretek | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](#)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_521_Gyumolcstermesztési_alapismeretek/ch09.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

41. ábra. Forrás: [Hogyan védekezzünk kullancs ellen? - Istenhegyi Géndiagnosztika \(gendiagnosztika.hu\)](#)

<https://gendiagnosztika.hu/hogyan-vedekezunk-kullancs-ellen/>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

42. ábra. Forrás: [Biostatisztika | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](#)

<https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/biostatisztika-1/ch03s07.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

43. ábra. Forrás: [5 Ways Writers Use Misleading Graphs To Manipulate You \[INFOGRAPHIC\] - Venngage](#)

<https://venngage.com/blog/misleading-graphs/>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

44. ábra. Forrás: [5 Ways Writers Use Misleading Graphs To Manipulate You \[INFOGRAPHIC\] - Venngage](#)

<https://venngage.com/blog/misleading-graphs/>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

45. ábra. Forrás: [What is a Function \(mathsisfun.com\)](#)

<https://www.mathsisfun.com/sets/function.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

46. ábra. Forrás: [What is a Function \(mathsisfun.com\)](#)

<https://www.mathsisfun.com/sets/function.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

47. ábra. Forrás: [Matematika - 9. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-9-osztaly/fuggvenyek-es-grafikonjuk-linearis-fuggveny/elsofoku-linearis-fuggvenyek>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

48. ábra. Forrás: [Matematika - 9. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-9-osztaly/fuggvenyek-es-grafikonjuk-linearis-fuggveny/elsofoku-linearis-fuggvenyek>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

49. ábra. Forrás: [Matematika - 9. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-9-osztaly/fuggvenyek-es-grafikonjuk-linearis-fuggveny/elsofoku-linearis-fuggvenyek>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

50. ábra. Forrás: [Matematika 10. - Függvények, sorozatok - 21. Lineáris és nemlineáris függvények \(nkp.hu\)](#)

https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika_10/lecke_02_021

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

51. ábra. Forrás: [Matematika - 9. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-9-osztaly/elsofoku-tortfuggveny-negyzetgyok-fuggveny/a-negyzetgyokfuggveny>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

52. ábra. Forrás: [What are the different types of graphs? \(weebly.com\)](#)

<https://lographics.weebly.com/what-are-the-different-types-of-graphs.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

53. ábra. Forrás: [College Algebra Flashcards | Quizlet](#)

<https://quizlet.com/111233645/college-algebra-flash-cards/>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

54. ábra. Forrás: [Matematika - 11. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-11-osztaly/az-exponencialis-fv-kiterjesztese-a-valos-szamok-halmazara/exponencialis-fuggvenyek-abrazolasa>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

55. ábra. Forrás: [Matematika - 11. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-11-osztaly/az-exponencialis-fv-kiterjesztese-a-valos-szamok-halmazara/exponencialis-fuggvenyek-abrazolasa>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

56. ábra. Forrás: [Matematika - 11. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-11-osztaly/az-exponencialis-fv-kiterjesztese-a-valos-szamok-halmazara/exponencialis-fuggvenyek-abrazolasa>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

57. ábra. Forrás: [Matematika | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](#)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_reimann_matematika/ch20s06.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

58. ábra. Forrás: [Matematika - 11. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-11-osztaly/a-logaritmus/atteres-mas-alapu-logaritmusra>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

59. ábra: [Matematika - 11. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/HU/matematika/matematika/matematika-11-osztaly/a-logaritmus-fuggvenyek/a-logaritmus-fuggveny>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

60. ábra. Forrás: [Matematika - 11. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/HU/matematika/matematika/matematika-11-osztaly/a-logaritmus-fuggvenyek/a-logaritmus-fuggveny>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

61. ábra. Forrás: [Matematika - 11. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-11-osztaly/a-logaritmus-fuggvenyek/inverz-fuggveny>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

62. ábra. Forrás: [Logarithmic scale - Wikipedia](#)

https://en.wikipedia.org/wiki/Logarithmic_scale

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

63. ábra. Forrás: [What is the Hjulstrom Curve all about? | Dr Laurie's Geog Blog \(wordpress.com\)](#)

<https://dlgb.wordpress.com/2008/09/09/what-is-the-hjulstrom-curve-all-about/>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

64. ábra. Forrás: [Bad SemiLog Excel \(lsu.edu\)](#)

<https://www.geol.lsu.edu/jlorenzo/geophysics/graphing/badsemi2.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

65. ábra. Forrás: [Measuring earthquakes — geo41.com](#)

<https://www.geo41.com/measuring-earthquakes>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

66. ábra. Forrás: [Matematika II. | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](#)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0013_galambos_matematika_ii/535_nevezetes_szgek_szgfggvnyei.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

67. ábra. Forrás: [Thomas-féle kalkulus, I. kötet | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](#)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_thomas_kalkulus_1/ch01s06.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

68. ábra. Forrás: Lóki J. & Demeter G. (2009). *Geomatematika*. Debreceni Egyetem, Természettudományi és Technológiai Kar. Egyetemi jegyzet. Kossuth Egyetemi Kiadó, 30. o.

69. ábra. Forrás: Lóki J. & Demeter G. (2009). *Geomatematika*. Debreceni Egyetem, Természettudományi és Technológiai Kar. Egyetemi jegyzet. Kossuth Egyetemi Kiadó, 30. o.

70. ábra. Forrás: [Matematika - 9. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-9-osztaly/fuggvenyek-es-grafikonjuk-linearis-fuggveny/fuggvenyek-abrazolasa>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

71. ábra. Forrás: [Koordináta-rendszer – Wikipédia \(wikipedia.org\)](#)

<https://hu.wikipedia.org/wiki/Koordin%C3%A1ta-rendszer>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.04.

72. ábra. Forrás: [Thomas-féle kalkulus, III. kötet | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](#)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011-0001-526_thomas_kalkulus_3/ch03s02.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.07.

73. ábra. Forrás: [Matematika - 11. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-11-osztaly/helyvektor-iranyvektor-normalvektor/vektorok-osszeadasa-kivonasa-szorzas-szamokkal>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.07.

74. ábra. Forrás: [Matematika - 10. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-10-osztaly/muveletek-vektorokkal/vektorok-koordinatai>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.07.

75. ábra. Forrás: [Matematika - 9. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-9-osztaly/vektorok-osszeadasuk/vektorok-osszegezese-az-osszeadas-tulajdonsagai>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.07.

76. ábra. Forrás: [Matematika 10. II. - Vektorok és a hasonlóság - 47. Vektorok összeadása \(nkp.hu\)](#)

https://www.nkp.hu/tankonyv/matematika_10_2/lecke_06_047

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.07.

77. ábra. Forrás: [Matematika - 9. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-9-osztaly/vektorok-osszeadasuk/vektorok-osszegzese-az-osszeadas-tulajdonsagai>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.07.

78. ábra. Forrás: [Matematika - 9. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-9-osztaly/vektorok/vektorok-kulonbsege>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.07.

79. ábra. Forrás: [Matematika - 10. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-10-osztaly/vektorok/muveletek-vektorokkal>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.07.

80. ábra. Forrás: [Matematika - 11. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-11-osztaly/vektorok-szorzasa/vektor-szorzasa-skalarral-felbontas-osszetevokre>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.07.

81. ábra. Forrás: [Matematika - 11. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-11-osztaly/vektorok-osszeadasa-kivonasa-szorzas-szamokkal/helyvektorok-osszegenek-koordinatai>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.07.

82. ábra. Forrás: [Matematika - 11. osztály | Sulinet Tudásbázis](#)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika-11-osztaly/vektorok-osszeadasa-kivonasa-szorzas-szamokkal/vektorok-kulonbsegenek-koordinatai>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.07.

83. ábra. Forrás: [Microsoft Word - mata11_5_t2.doc \(kooperativ.hu\)](#)

http://www.kooperativ.hu/matematika/3_modulle%C3%ADr%C3%A1sok-tan%C3%A1r-tanul%C3%B3-eszk%C3%B6z/2_A_t%C3%ADpus/11-%C3%A9vfolyam/2_Tan%C3%A1r%20modulok/amat11_5_tan%C3%A1r.pdf

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.07.

84. ábra. Forrás: [Két pont távolsága \(mathreference.org\)](#)

<https://www.mathreference.org/index/page/id/79/lg/hu>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.07.

85. ábra. Forrás: Lóki J. & Demeter G. (2009). *Geomatematika*. Debreceni Egyetem, Természettudományi és Technológiai Kar. Egyetemi jegyzet. Kossuth Egyetemi Kiadó, 12. o.

86. ábra. Forrás: [ERTH 465, Fall 2015, Homework #2 \(sfsu.edu\)](http://ERTH465.Fall2015.Homework#2)

<http://tornado.sfsu.edu/Geosciences/classes/e465/Wind/wind.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

87. ábra. Forrás: [8.4 Do you need a weathervane to see which way the wind blows? | METEO 300: Fundamentals of Atmospheric Science \(psu.edu\)](http://8.4DoYouNeedAWeathervaneToSeeWhichWayTheWindBlows?)

<https://www.e-education.psu.edu/meteo300/node/719>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

88. ábra. Forrás: <http://pblap.atm.ncu.edu.tw/showdoc.asp?id=176>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

89. ábra. Forrás: [Introduction to GIS - vector based GIS \(uah.es\)](http://IntroductionToGIS-vectorbasedGIS)

https://geogra.uah.es/patxi/gisweb/GISModule/GIST_Vector.htm

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

90. ábra. Forrás: <https://www.arcanum.com/hu/online-kiadvanyok/pannon-pannon-enciklopedia-1/magyarorszag-foldje-1D58/magyarorszag-terkepi-abrazolasa-1E23/korszeru-topografiai-terkepsorozataink-gyorffy-janosklinghammer-istvan-1EB5/digitalis-topografiai-terkepek-1EC1/>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

91. ábra. Forrás: [eotr100e.jpg \(1313×834\) \(elte.hu\)](http://eotr100e.jpg)

<http://lazarus.elte.hu/hun/digkonyv/topo/eotr100e.jpg>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

92. ábra. Forrás: saját szerkesztés

93. ábra. Forrás: [Műveletek halmazokkal \(mathreference.org\)](http://Műveletek halmazokkal)

<https://www.mathreference.org/index/page/id/59/lg/hu>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

94. ábra. Forrás: [Műveletek halmazokkal \(mathreference.org\)](http://Műveletek halmazokkal)

<https://www.mathreference.org/index/page/id/59/lg/hu>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

95. ábra. Forrás: [Műveletek halmazokkal \(mathreference.org\)](http://Műveletek halmazokkal)

<https://www.mathreference.org/index/page/id/59/lg/hu>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

96. ábra. Forrás: [Műveletek halmazokkal \(mathreference.org\)](http://Műveletek halmazokkal)

<https://www.mathreference.org/index/page/id/59/lg/hu>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

97. ábra. Forrás: [Műveletek halmazokkal \(mathreference.org\)](http://Műveletek halmazokkal)

<https://www.mathreference.org/index/page/id/59/lg/hu>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

98. ábra. Forrás: saját szerkesztés

99. ábra. Forrás: [STATISZTIKAI MELLÉKLET \(srpszkk.hu\)](https://www.srpszkk.hu)

https://www.srpszkk.hu/tamop412b/meres_ertekeles/statisztikai_mellklet.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

100. ábra. Forrás: www.leansigmacorporation.com

továbbá: <https://www.analyticsvidhya.com/blog/2020/07/univariate-analysis-visualization-with-illustrations-in-python/>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

101. ábra. Forrás: [\(PDF\) Improving the Accuracy of Convolutional Neural Networks by Identifying and Removing Outlier Images in Datasets Using t-SNE \(researchgate.net\)](https://www.researchgate.net/publication/340969321_Improving_the_Accuracy_of_Convolutional_Neural_Networks_by_Identifying_and_Removing_Outlier_Images_in_Datasets_Using_t-SNE/figures?lo=1)

[https://www.researchgate.net/publication/340969321_Improving the Accuracy of Convolutional Neural Networks by Identifying and Removing Outlier Images in Datasets Using t-SNE/figures?lo=1](https://www.researchgate.net/publication/340969321_Improving_the_Accuracy_of_Convolutional_Neural_Networks_by_Identifying_and_Removing_Outlier_Images_in_Datasets_Using_t-SNE/figures?lo=1)

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

102. ábra. Forrás: [Valószínűségszámítás és statisztika | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0046_valoszinusegszamitas_es_statisztika/ch05.html)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0046_valoszinusegszamitas_es_statisztika/ch05.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

103. ábra. Forrás: [Valószínűségszámítás és statisztika | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0046_valoszinusegszamitas_es_statisztika/ch05.html)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0046_valoszinusegszamitas_es_statisztika/ch05.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

104. ábra. Forrás: [Valószínűségszámítás és statisztika | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0046_valoszinusegszamitas_es_statisztika/ch05.html)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0046_valoszinusegszamitas_es_statisztika/ch05.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

105. ábra. Forrás: [A gyógyszer technológia alapjai | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0016_02_gyogyszertechnologia_alapjai/ch21.html)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0016_02_gyogyszertechnologia_alapjai/ch21.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

106. ábra. Forrás: [A gyógyszer technológia alapjai | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0016_02_gyogyszertechnologia_alapjai/ch21.html)

https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0016_02_gyogyszertechnologia_alapjai/ch21.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

107. ábra. Forrás: [A gyógyszer technológia alapjai | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0016_02_gyogyszertechnologia_alapjai/ch21.html)
https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0016_02_gyogyszertechnologia_alapjai/ch21.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

108. ábra. Forrás: [Biostatisztika | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/biostatisztika-1/ch10s02.html)
<https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tkt/biostatisztika-1/ch10s02.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

109. ábra. Forrás: [A matematikai statisztika elemei \(kfki.hu\)](https://www.kfki.hu/~cheminfo/hun/eloado/stat/stat7.html)
<https://www.kfki.hu/~cheminfo/hun/eloado/stat/stat7.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

110. ábra. Forrás: [Környezetstratégia | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0021_Kornyezetstrategia/ch15s03.html)
https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0021_Kornyezetstrategia/ch15s03.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

111. ábra. Forrás: [TemperatureProjection_2018-614x364.png \(614×364\) \(berkeleyearth.org\)](http://berkeleyearth.org/wp-content/uploads/2019/01/TemperatureProjection_2018-614x364.png)
http://berkeleyearth.org/wp-content/uploads/2019/01/TemperatureProjection_2018-614x364.png

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

112. ábra. Forrás: printscreen

113. ábra. Forrás: [Calculate Moving Average » Chandoo.org - Learn Excel, Power BI & Charting Online](https://chandoo.org/wp/calculate-moving-average/)
<https://chandoo.org/wp/calculate-moving-average/>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

A táblázatok forrásai

1.táblázat. Forrás: saját szerkesztés

2.táblázat: <https://www.qimacros.com/histogram-excel/how-to-determine-histogram-bin-interval/>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

A lábjegyzetek forrásai

1.: <http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/foldrajz2/ch01.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

2.: <http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/foldrajz2/ch01.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

3.: <http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/foldrajz2/ch01.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

4.: <http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/foldrajz2/ch01.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

5.: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0073_meteorologia_alapismeretek/ch04.html#id515953

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

6.: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0073_meteorologia_alapismeretek/ch04.html#id515953

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

7.: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0073_meteorologia_alapismeretek/ch04.html#id515953

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

8.: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0073_meteorologiai_muszerek_merorendszerek/ch04s02.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

9.: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0073_meteorologiai_muszerek_merorendszerek/ch04s02.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

10.: <https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/termesztudomanyok/foldrajz/termeszetfoldrajz/viz-a-legkorben/vizgoztartalom-es-a-hozzakapcsolodo-jelensegek>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

11.: https://www.met.hu/ismeret-tar/meteorologiai_alapismeretek/bevezetes_a_meteorologiaba/

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

12.: <https://docplayer.hu/5302733-li-resz-hidrologiai-szamitasok-1-a-csatornak-vizszallitasa-2-a-csatornak-meretezese-3-a-folyadekok-kifolyasa-tartalyokbol-4-a-zsilipek-vizhozama.html>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

13.: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0073_meteorologia_alapismeretek/ch04.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

14.: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0073_meteorologia_alapismeretek/ch04.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.08.

15.: Telbisz T., Szabó P. & Szalai Z. (2013). *Matematika a földrajzban. Útmutató és feladatgyűjtemény földrajzos hallgatók részére*. ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet, Földrajztudományi Központ, Budapest. 8. oldal

16.:

http://www.jgypk.hu/tamop15e/tananyag_html/kozgalapok/a_legfontosabb_mutatk_szmtsi_mdja.html

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.

17.: <https://www.demografia.hu/hu/tudastar/fogalomtar/32-nemek-szerinti-megoszlas>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.

18.: <https://demografia.hu/hu/tudastar/fogalomtar/57-csecsemohalandosag>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.

19.: <https://www.mathreference.org/index/page/id/410/lg/hu>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.

20.: <https://www.mathreference.org/index/page/id/410/lg/hu>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.

21.: [Geomorfológiai térképezés | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](https://www.geomorphology.hu/tankonyvtar)

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.

22.: <http://lazarus.elte.hu/hun/dolgozo/jesus/gyerterk/princ/alapism/alap4/alap4-1.htm>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.

23.: <https://www.nkp.hu/api/media/file/2596fac8cb0e6afd0bc6be238d5130e5b8d49817>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.

24.: Dr. Abonyiné Dr. Palotás J. (1999). *Általános statisztika alkalmazása a társadalmi-gazdasági földrajzban*. JATEPress, Szeged, 45. oldal

25.: <https://idegen-szavak.hu/keres/grafikon>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.

26.: Dr. Abonyiné Dr. Palotás J. (1999). *Általános statisztika alkalmazása a társadalmi-gazdasági földrajzban*. JATEPress, Szeged, 45. oldal

27.: Dr. Abonyiné Dr. Palotás J. (1999). *Általános statisztika alkalmazása a társadalmi-gazdasági földrajzban*. JATEPress, Szeged, 45-46. oldal

28.: Telbisz T., Szabó P. & Szalai Z. (2013). *Matematika a földrajzban. Útmutató és feladatgyűjtemény földrajzos hallgatók részére*. ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet, Földrajztudományi Központ, Budapest. 21. oldal „Logaritmikus skálázás”

29. – 33.: Hajnal I. (1987). *Matematika I*. Nemzeti Tankönyvkiadó. 28. fejezet

34.: Lóki J. & Demeter G., (2009). *Geomatematika*. Debreceni Egyetem, Természettudományi és Technológiai Kar. Egyetemi jegyzet. Kossuth Egyetemi Kiadó, 9. o.

35.: <https://www.arcanum.com/hu/online-kiadvanyok/MuMaTu-a-mult-magyar-tudosai-1/konig-gyula-38C9/konig-gyula-mint-matematikus-391C/munkassaga-a-halmazelméletben-es-a-matematikai-logikában-3966/>

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.

36. – 41.: Hajnal I. (1987). *Matematika I*. Nemzeti Tankönyvkiadó. 2. és 3. fejezet

42.: Crilly, T. (2011). *Matematika*. Nagy kérdések. Budapest, HU:Geographia Kiadó. 88-89.o.

43. – 45.: Geresdi I. & Bugya T. (2005). *Geostatisztika példatár*. Jegyzet. PTE TTK Földrajzi Intézet [geostatisztikai_peldatar_2008.pdf \(pte.hu\)](#)
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
- 46.: http://www.agr.unideb.hu/~huzsvai/okt/stat_1/5_eloadas_1.pdf
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
- 47.: http://www.agr.unideb.hu/~huzsvai/okt/stat_1/5_eloadas_1.pdf
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
- 48.: .: Geresdi I. & Bugya T. (2005). *Geostatisztika példatár*. Jegyzet. PTE TTK Földrajzi Intézet [geostatisztikai_peldatar_2008.pdf \(pte.hu\)](#)
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
- 49.: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_519_42491/ch02.html
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
- 50.: https://www.srpszkk.hu/tamop412b/meres_ertekeles/statisztikai_mellklet.html
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
- 51.: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0025_Acs_Pongrac-Bevezetes_a_sportstatistikaba/ch11.html
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
- 52.: <https://www.kfki.hu/~cheminfo/hun/eloado/stat/stat2.html>
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
- 53.: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2010-0012_statistika/ch02s02.html
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
- 54.: <http://xenia.sote.hu/hu/biosci/docs/biometr/course/explore/statfv.html>
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
- 55.: <https://www.kfki.hu/~cheminfo/hun/eloado/stat/stat2.html>
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
- 56.: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0025_Acs_Pongrac-Bevezetes_a_sportstatistikaba/ch12s02.html
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
- 57.: http://www.agr.unideb.hu/~huzsvai/okt/stat_1/5_eloadas_1.pdf
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
58. – 59.: Geresdi I. & Bugya T. (2005). *Geostatisztika példatár*. Jegyzet. PTE TTK Földrajzi Intézet [geostatisztikai_peldatar_2008.pdf \(pte.hu\)](#)
Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.

60. – 61.: Dr. Abonyiné Dr. Palotás J. (1999). *Általános statisztika alkalmazása a társadalmi-gazdasági földrajzban*. JATEPress, Szeged, 89. oldal
- 62.: Palmer, P. I. (2014). *Essential Maths for Geoscientists. An Introduction*. John Wiley&Sons, Ltd
- 63.: Crilly, T. (2011). *Matematika*. Nagy kérdések. Budapest, HU:Geographia Kiadó. 87.o.
64. – 65.: Geresdi I. & Bugya T. (2005). *Geostatisztika példatár*. Jegyzet. PTE TTK Földrajzi Intézet [geostatisztikai peldatar 2008.pdf \(pte.hu\)](http://geostatisztikai.peldatar.2008.pdf(pte.hu))
- Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
- 66.: Dr. Abonyiné Dr. Palotás J. (1999). *Általános statisztika alkalmazása a társadalmi-gazdasági földrajzban*. JATEPress, Szeged, 105-107. oldal
- 67.: <https://vmek.oszk.hu/00000/00056/html/103.htm>
- Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.
- 68.: Hajnal I. (1987). *Matematika I*. Nemzeti Tankönyvkiadó. 8/b fejezet, 111. oldal
- 69.: Hajnal I. (1987). *Matematika I*. Nemzeti Tankönyvkiadó. 8/b fejezet, 112. oldal
- 70.: Telbisz T., Szabó P. & Szalai Z. (2013). *Matematika a földrajzban. Útmutató és feladatgyűjtemény földrajzos hallgatók részére*. ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet, Földrajztudományi Központ, Budapest. 15. oldal
- 71.: Telbisz T., Szabó P. & Szalai Z. (2013). *Matematika a földrajzban. Útmutató és feladatgyűjtemény földrajzos hallgatók részére*. ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet, Földrajztudományi Központ, Budapest. 15. oldal
- 72.: Telbisz T., Szabó P. & Szalai Z. (2013). *Matematika a földrajzban. Útmutató és feladatgyűjtemény földrajzos hallgatók részére*. ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet, Földrajztudományi Központ, Budapest. 6. oldal
- 73.: Telbisz T., Szabó P. & Szalai Z. (2013). *Matematika a földrajzban. Útmutató és feladatgyűjtemény földrajzos hallgatók részére*. ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet, Földrajztudományi Központ, Budapest. 7. oldal
- 74.: Telbisz T., Szabó P. & Szalai Z. (2013). *Matematika a földrajzban. Útmutató és feladatgyűjtemény földrajzos hallgatók részére*. ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet, Földrajztudományi Központ, Budapest. 9. oldal, 12. feladat
- 75.: Telbisz T., Szabó P. & Szalai Z. (2013). *Matematika a földrajzban. Útmutató és feladatgyűjtemény földrajzos hallgatók részére*. ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet, Földrajztudományi Központ, Budapest. 10. oldal, 14. feladat
- 76.: Telbisz T., Szabó P. & Szalai Z. (2013). *Matematika a földrajzban. Útmutató és feladatgyűjtemény földrajzos hallgatók részére*. ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet, Földrajztudományi Központ, Budapest. 8. oldal, keretezett példa feladat
- 77.: Unger J., Horváth J. & Sümeghy Z. (2010). *Földtudományi és földrajzi számítási feladatok*. Szegedi Tudományegyetem Természettudományi és Informatikai Kar, JATEPress. 205. oldal mintafeladat
- 78.: Telbisz T., Szabó P. & Szalai Z. (2013). *Matematika a földrajzban. Útmutató és feladatgyűjtemény földrajzos hallgatók részére*. ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet, Földrajztudományi Központ, Budapest. 9. oldal, 13. feladat
- 79.: Telbisz T., Szabó P. & Szalai Z. (2013). *Matematika a földrajzban. Útmutató és feladatgyűjtemény földrajzos hallgatók részére*. ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet, Földrajztudományi Központ, Budapest. 7. oldal, 4. feladat
- 80.: Palmer, P. I. (2014). *Essential Maths for Geoscientists. An Introduction*. John Wiley&Sons, Ltd

81.: Palmer, P. I. (2014). *Essential Maths for Geoscientists. An Introduction*. John Wiley&Sons, Ltd

Telbisz T., Szabó P. & Szalai Z. (2013). *Matematika a földrajzban. Útmutató és feladatgyűjtemény földrajzos hallgatók részére*. ELTE TTK Földrajz- és Földtudományi Intézet, Földrajztudományi Központ, Budapest. 25. oldal, 46. feladat egy részlete

82. – 84.: Palmer, P. I. (2014). *Essential Maths for Geoscientists. An Introduction*. John Wiley&Sons, Ltd

85.: Dr. Abonyiné Dr. Palotás J. (1999). *Általános statisztika alkalmazása a társadalmi-gazdasági földrajzban*. JATEPress, Szeged, 84. oldal példafeladat

86.: Dr. Abonyiné Dr. Palotás J. (1999). *Általános statisztika alkalmazása a társadalmi-gazdasági földrajzban*. JATEPress, Szeged, 86. oldal példafeladat

87.: Dr. Abonyiné Dr. Palotás J. (1999). *Általános statisztika alkalmazása a társadalmi-gazdasági földrajzban*. JATEPress, Szeged, 87. oldal

88.: Dr. Abonyiné Dr. Palotás J. (1999). *Általános statisztika alkalmazása a társadalmi-gazdasági földrajzban*. JATEPress, Szeged, 96. oldal, 18. feladat

89.: https://regi.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_519_42491/ch02s02.html

2.29. táblázat

90.: http://www.kooperativ.hu/matematika/3_modulle%C3%ADr%C3%A1sok-tan%C3%A1r-tanul%C3%B3-eszk%C3%B6z/2_A_t%C3%ADpus/10-%C3%A9vfolyam/2_Tan%C3%A1ri%20modulok/amat10_9_tan%C3%A1r.pdf

12. oldal, Mintafeladat2

91.: http://www.kooperativ.hu/matematika/3_modulle%C3%ADr%C3%A1sok-tan%C3%A1r-tanul%C3%B3-eszk%C3%B6z/2_A_t%C3%ADpus/10-%C3%A9vfolyam/2_Tan%C3%A1ri%20modulok/amat10_9_tan%C3%A1r.pdf

16. oldal, 9. feladat

92. – 94.: Palmer, P. I. (2014). *Essential Maths for Geoscientists. An Introduction*. John Wiley&Sons, Ltd

95.: Dr. Abonyiné Dr. Palotás J. (1999). *Általános statisztika alkalmazása a társadalmi-gazdasági földrajzban*. JATEPress, Szeged, 66. oldal, 19. feladat

96.: Dr. Abonyiné Dr. Palotás J. (1999). *Általános statisztika alkalmazása a társadalmi-gazdasági földrajzban*. JATEPress, Szeged, 68. oldal, 24. feladat

97.: [Gyümölcstermesztési alapismeretek | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](#)

9.6. táblázat

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.

98.: [Gyümölcstermesztési alapismeretek | Digitális Tankönyvtár \(tankonyvtar.hu\)](#)

9.5. táblázat

Utolsó megtekintés dátuma: 2021.06.11.

További ajánlott irodalmak

Bugya T. (2007). *Statisztikai és ábrázolási alapismeretek földrajzi példákkal*. Egyetemi jegyzet, PTE TTK, 211 p.

http://www.moderngeografia.hu/geoinfo/statisztikai_alapismeretek.pdf

Babbie, E. (1999). *A társadalomtudományi kutatás gyakorlata*. Balassi Kiadó Budapest, 704p. Excel adatbáziskezelés

Héra G. & Ligeti Gy. (2005). *Módszertan. A társadalmi jelenségek kutatása*. Osiris Kiadó, Budapest, 375 p.

Nagyvárad L. & Gyenizse P. (2010). *Földgömbgyakorlatok*.

<http://tamop412a.ttk.pte.hu/files/foldrajz6/docbook/www/docbook.html>