

Analízis alapjai II.

Számsorozatok korlátossága szélsőértéke, Számsorozatok monotonitásának, konvergenciájának vizsgálata definíció alapján.

Eisner Tímea

Pécsi Tudományegyetem
Matematikai és Informatikai Intézet

Számsorozatok

Definíció

1. *A természetes számok halmazán értelmezett függvényeket **sorozatoknak** nevezzük.*
2. *Azokat a hozzárendeléseket, melyek a természetes számok minden eleméhez egy X halmaz egy és csakis egy elemét rendelik, **sorozatoknak** nevezzük.*

Jelölések, elnevezések:

- $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ ($X \neq \emptyset$): **sorozat**
- $x(n) := x_n$: **sorozat n . tagja**,
 n : **elem indexe**.
- További jelölések sorozatra:

$$x = (x_0, x_1, \dots) \quad x = (x_n, n \in \mathbb{N}) \quad x_n \ (n \in \mathbb{N})$$

Számsorozatok ábrázolása

- Számegyenesen: Az egyes elemek értékét ábrázoljuk. Jelöljük, hogy melyik elem melyik indexhez tartozik.
- Koordinátarendszerben: A sorozat elemeit (n, x_n) számpárokként ábrázoljuk (a sorozatot az $n \mapsto x_n$ hozzárendelés grafikus képeként ábrázoljuk).

Monotonitás

Monotonitás

Definíció

Az $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ valós számsorozatot

- **monoton csökkenőnek** nevezzük, ha $x_n \geq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
- **szigorúan monoton csökkenőnek** nevezzük, ha $x_n > x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
- **monoton növénynek** nevezzük, ha $x_n \leq x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
- **szigorúan monoton növénynek** hívjuk, ha $x_n < x_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Monotonitás

Egy valós számsorozat monotonitás szempontjából tehát lehet

Monotonitás

Egy valós számsorozat monotonitás szempontjából tehát lehet

a) **monoton:**

Monotonitás

Egy valós számsorozat monotonitás szempontjából tehát lehet

a) **monoton**:

- **monoton növekedő**:
 - szigorúan monoton növekedő (Pl. $(n, n \in \mathbb{N})$)
- **monoton csökkenő**:

b) **nem monoton**,

Monotonitás

Egy valós számsorozat monotonitás szempontjából tehát lehet

a) **monoton**:

- **monoton növekedő**:
 - szigorúan monoton növekedő (Pl. $(n, n \in \mathbb{N})$)
 - nem szigorúan monoton növekedő (Pl. $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots)$, konstans sorozat)
- **monoton csökkenő**:

b) **nem monoton**,

Monotonitás

Egy valós számsorozat monotonitás szempontjából tehát lehet

a) **monoton**:

- **monoton növekedő**:
 - szigorúan monoton növekedő (Pl. $(n, n \in \mathbb{N})$)
 - nem szigorúan monoton növekedő (Pl. $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots)$, konstans sorozat)
- **monoton csökkenő**:
 - szigorúan monoton csökkenő (Pl.: $(-n, n \in \mathbb{N})$)

b) **nem monoton**,

Monotonitás

Egy valós számsorozat monotonitás szempontjából tehát lehet

a) **monoton**:

- **monoton növekedő**:
 - szigorúan monoton növekedő (Pl. $(n, n \in \mathbb{N})$)
 - nem szigorúan monoton növekedő (Pl. $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots)$, konstans sorozat)
- **monoton csökkenő**:
 - szigorúan monoton csökkenő (Pl.: $(-n, n \in \mathbb{N})$)
 - nem szigorúan monoton csökkenő (Pl.: $(-1, -1, -2, -2, -3, -3, -4, -4, \dots)$, konstans sorozat)

b) **nem monoton**,

Monotonitás

Egy valós számsorozat monotonitás szempontjából tehát lehet

a) **monoton**:

- **monoton növekedő**:
 - szigorúan monoton növekedő (Pl. $(n, n \in \mathbb{N})$)
 - nem szigorúan monoton növekedő (Pl. $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots)$, konstans sorozat)
- **monoton csökkenő**:
 - szigorúan monoton csökkenő (Pl.: $(-n, n \in \mathbb{N})$)
 - nem szigorúan monoton csökkenő (Pl.: $(-1, -1, -2, -2, -3, -3, -4, -4, \dots)$, konstans sorozat)

b) **nem monoton**,

- **egy adott indextől kezdve monoton**.
Pl.: $(6, 5, 3, 4, 9, 8, 2, 7, 5, 8, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$

Monotonitás

Egy valós számsorozat monotonitás szempontjából tehát lehet

a) **monoton**:

- **monoton növekedő**:
 - **szigorúan monoton növekedő** (Pl. $(n, n \in \mathbb{N})$)
 - **nem szigorúan monoton növekedő** (Pl. $(1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots)$, konstans sorozat)
- **monoton csökkenő**:
 - **szigorúan monoton csökkenő** (Pl.: $(-n, n \in \mathbb{N})$)
 - **nem szigorúan monoton csökkenő**
(Pl.: $(-1, -1, -2, -2, -3, -3, -4, -4, \dots)$, konstans sorozat)

b) **nem monoton**,

- **egy adott indextől kezdve monoton**.
Pl.: $(6, 5, 3, 4, 9, 8, 2, 7, 5, 8, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$
- **egy adott indextől kezdve sem monoton**.
Pl.: $((-1)^n, n \in \mathbb{N}), (\sin \frac{4\pi}{n}, n \in \mathbb{N}^*)$.

Monotonitás

Feladat

Fogalmazza meg pozitív állítás formájában, hogy mit jelemt az, hogy egy $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat

- *nem monoton csökken,*
- *nem monoton nő,*
- *nem monoton.*

Megoldás. Egy $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat

- *nem monoton csökken $\Leftrightarrow \exists n^* \in \mathbb{N} : x_{n^*} < x_{n^*+1}$*
- *nem monoton nő $\Leftrightarrow \exists n^{**} \in \mathbb{N} : x_{n^{**}} < x_{n^{**}+1}$*
- *nem monoton $\Leftrightarrow$ nem monoton nő ÉS nem monoton csökken*



Gyakorló feladatok 1

Feladat

Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat monotonitás szempontjából!

a) $x_n = \frac{4n+3}{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$

b) $x_n = \frac{4n+3}{2n-7} \quad (n \in \mathbb{N})$

c) $x_n = 1 + \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

d) $x_n = n^2 - n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$

e) $x_n = \frac{2^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N})$

f) $x_n = \frac{2^n}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

g) $x_n = (-1)^n \cdot n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

h) $x_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Gyakorló feladatok 1 – megoldás

$$\begin{aligned} a) \quad x_{n+1} - x_n &= \frac{4(n+1)+3}{2(n+1)+1} - \frac{4n+3}{2n+1} = \frac{4n+7}{2n+3} - \frac{4n+3}{2n+1} = \\ &= \frac{(4n+7)(2n+1) - (4n+3)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \\ &= \frac{-2}{(2n+3)(2n+1)} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

tehát az (x_n) sorozat szigorúan monoton csökken.

$$\begin{aligned} b) \quad x_{n+1} - x_n &= \frac{4(n+1)+3}{2(n+1)-7} - \frac{4n+3}{2n-7} = \frac{4n+7}{2n-5} - \frac{4n+3}{2n-7} = \\ &= \frac{(4n+7)(2n-7) - (4n+3)(2n-5)}{(2n-5)(2n-7)} = \\ &= \frac{-35}{(2n-5)(2n-7)} < 0 \quad \forall n > 3, \end{aligned}$$

tehát (x_n) nem monoton, de szig. monoton csökken, ha $n > 3$.

Gyakorló feladatok 1 – megoldás

$$\begin{aligned} c) \quad x_{n+1} - x_n &= 1 + \frac{1}{(n+1)^2} - \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \\ &= \frac{n^2 - (n+1)^2}{(n+1)^2 \cdot n^2} = \frac{-2n-1}{(n+1)^2 \cdot n^2} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

tehát az (x_n) sorozat szigorúan monoton csökken.

$$\begin{aligned} d) \quad x_{n+1} - x_n &= (n+1)^2 - (n+1) + 1 - (n^2 - n + 1) = \\ &= n^2 + 2n + 1 - n - n^2 + n - 1 = 2n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

tehát az (x_n) sorozat monoton nő. (Megjegyezzük, hogy $n > 0$ esetén szigorúan monoton nő.)

Gyakorló feladatok 1 – megoldás

Mivel az $e)$ és $f)$ sorozatok minden eleme pozitív, a monotonitást vizsgálhatjuk a $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ sorozat 1-hez való viszonyításával is.

Mindkét sorozat esetén ezt célszerű vizsgálni.

$$e) \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{(n+1) \cdot n!} \cdot \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} < 1$$

minden $n > 1$ esetén, tehát az (x_n) sorozat $n > 1$ esetén szigorúan monoton csökken. A sorozat nem monoton, mert

$$x_0 = 1 < x_1 = 2 = x_2 > x_3 = \frac{4}{3} > x_4 > \dots$$

$$f) \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{2 \cdot 2^n}{n+1} \cdot \frac{n}{2^n} = \frac{2n}{n+1} \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

tehát az (x_n) sorozat monoton nő. A sorozat $n > 1$ esetén szigorúan monoton.

Gyakorló feladatok 1 – megoldás

$$\begin{aligned} g) \quad x_{n+1} - x_n &= (-1)^{n+1} \cdot (n+1) - (-1)^n \cdot n = \\ &= (-1)^{n+1} \cdot (n+1) + (-1)^{n+1} \cdot n = \\ &= (-1)^{n+1} \cdot (2n+1) \begin{cases} > 0, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ < 0, & \text{ha } n \text{ páros,} \end{cases} \end{aligned}$$

tehát az (x_n) sorozat nem monoton.

$$\begin{aligned} h) \quad x_{n+1} - x_n &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} - (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \begin{cases} > 0, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ < 0, & \text{ha } n \text{ páros,} \end{cases} \end{aligned}$$

tehát az (x_n) sorozat nem monoton.

Korlátosság – szélsőérték

- Egy (x_n) sorozat esetén képezzük azt a H halmazt, mely a sorozat elemeit tartalmazza, azaz

$$H := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

- Ez a halmaz tulajdonképpen az (x_n) sorozat értékkészlete. (Ne felejtsük el, hogy a sorozat, egy speciális függvény.)
- Egy sorozatnak akkor van szélsőértéke, ha értékkészletének van szélsőértéke.
- Egy sorozatot akkor tekintünk korlátnak, ha értékkészlete korlátos.
- Ezek alapján a halmazokra tanult fogalmak könnyen átültethetők a sorozatokra.

Szélsőérték

Feladat

Fogalmazza át a halmazoknál tanult szélsőértékre vonatkozó fogalmakat sorozatokra!

Megoldás. Az $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ valós számsorozatnak

- van **minimuma** $\Leftrightarrow \exists n_* \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n_*},$
- **NINCS minimuma** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_{n_0} > x_n,$
- van **maximuma** $\Leftrightarrow \exists n^* \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n^*},$
- **NINCS maximuma** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_{n_0} < x_n.$



Szélsőérték és monotonitás

Feladat

Milyen kapcsolat van a sorozatok monotonitása és a szélsőérték között?

Megoldás. Ha az $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ valós számsorozat

- monoton nő, akkor $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_0$, tehát van minimuma.
- monoton csökken, akkor $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_0$, tehát van maximuma.



Korlátosság

Feladat

Fogalmazza át a halmazoknál tanult korlátosságra vonatkozó fogalmakat sorozatokra!

Megoldás. Az $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ valós számsorozat

- **alulról korlátos** $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq k$,
- **alulról NEM korlátos** $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_{n_0} > k$,
- **felülről korlátos** $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq K$,
- **felülről NEM korlátos** $\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_{n_0} < K$,
- **korlátos** $\Leftrightarrow$ alulról és felülről is korlátos $\Leftrightarrow$

$$\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M,$$

- **NEM korlátos** $\Leftrightarrow$ alulról vagy felülről nem korlátos $\Leftrightarrow$

$$\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |x_{n_0}| > M.$$

$$\alpha = \inf x, \beta = \sup x$$

Feladat

Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy $\alpha = \inf x$, $\beta = \sup x$, ha $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos valós számsorozat.

Megoldás. $\alpha = \inf x = \inf(x_n) \Leftrightarrow$

i) $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \geq \alpha$

$$\alpha = \inf x, \beta = \sup x$$

Feladat

Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy $\alpha = \inf x$, $\beta = \sup x$, ha $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos valós számsorozat.

Megoldás. $\alpha = \inf x = \inf(x_n) \Leftrightarrow$

i) $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \geq \alpha$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ index, melyre $x_{n_0} < \alpha + \varepsilon$

$$\alpha = \inf x, \beta = \sup x$$

Feladat

Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy $\alpha = \inf x$, $\beta = \sup x$, ha $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos valós számsorozat.

Megoldás. $\alpha = \inf x = \inf(x_n) \Leftrightarrow$

i) $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \geq \alpha$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ index, melyre $x_{n_0} < \alpha + \varepsilon$

$\beta = \sup x = \sup(x_n) \Leftrightarrow$

$$\alpha = \inf x, \beta = \sup x$$

Feladat

Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy $\alpha = \inf x$, $\beta = \sup x$, ha $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos valós számsorozat.

Megoldás. $\alpha = \inf x = \inf(x_n) \Leftrightarrow$

i) $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \geq \alpha$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ index, melyre $x_{n_0} < \alpha + \varepsilon$

$\beta = \sup x = \sup(x_n) \Leftrightarrow$

i) $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \leq \beta$

$$\alpha = \inf x, \beta = \sup x$$

Feladat

Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy $\alpha = \inf x$, $\beta = \sup x$, ha $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos valós számsorozat.

Megoldás. $\alpha = \inf x = \inf(x_n) \Leftrightarrow$

i) $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \geq \alpha$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ index, melyre $x_{n_0} < \alpha + \varepsilon$

$\beta = \sup x = \sup(x_n) \Leftrightarrow$

i) $\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \leq \beta$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $n_0 \in \mathbb{N}$ index, melyre $x_{n_0} > \beta - \varepsilon$



A halmazokhoz hasonlóan, ha egy (x_n) sorozat

- felülről nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy

$$\sup(x_n) = \sup x = +\infty,$$

- alulról nem korlátos, akkor azt mondjuk, hogy

$$\inf(x_n) = \inf x = -\infty.$$

Konvergencia

Definíció

Legyen $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_n, n \in \mathbb{N})$ egy számsorozat. Az x sorozat **konvergens**, ha

(A) $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad V^\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin K_\varepsilon(\alpha)\}$ véges halmaz.

(B) $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N$ esetén:
 $|x_n - \alpha| < \varepsilon$.

Tétel

A két konvergencia definíció ekvivalens egymással. $((A) \Leftrightarrow (B))$

Tétel

Ha $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_n, n \in \mathbb{N})$ konvergens számsorozat, akkor egyetlen $\alpha \in \mathbb{R}$ valós szám létezik, melyre (A) illetve (B) teljesül.

Határérték

Definíció

Az $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozathoz az (A) illetve a (B) definíció szerinti egyetlen $\alpha \in \mathbb{R}$ számot az x sorozat **limeszének**, vagy **határértékének** nevezzük.

Jelölés:

$$\lim x = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad x_n \rightarrow \alpha \ (n \rightarrow \infty), \quad L(x) = \alpha$$

Határérték

Definíció

Az $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergens sorozathoz az (A) illetve a (B) definíció szerinti egyetlen $\alpha \in \mathbb{R}$ számot az x sorozat **limeszének**, vagy **határértékének** nevezzük.

Jelölés:

$$\lim x = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad x_n \rightarrow \alpha \ (n \rightarrow \infty), \quad L(x) = \alpha$$

Konvergencia definíciójának 3 következménye

Következmény (1. következmény)

Ha az $x, y : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ számsorozatok majdnem minden (m.m.) n indexre megegyeznek, azaz $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy, ha $n > N : x_n = y_n$, akkor a két sorozat ekvikonvergens, azaz x akkor és csak akkor konvergens, ha y is konvergens és $L(x) = L(y)$.

Következmény (2. következmény)

Minden konvergens sorozat korlátos, de van olyan korlátos sorozat, amely nem konvergens.

Következmény (3. következmény)

Konvergens sorozat bármely részsorozata is konvergens, és határértéke az eredeti sorozat határértékével egyenlő.

Megjegyzés

A 3. következmény alapján, ha egy sorozat két részsorozatának határértéke különböző, akkor az eredeti sorozat nem konvergens.

Divergencia

Definíció

Ha egy $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy **divergens**.

Feladat

Fogalmazzuk meg az (A) illetve a (B) definíciók szerint a divergenciát.

Megoldás. Az $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat divergens, ha

$\neg(A) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} : \quad \exists \varepsilon > 0 \quad V^\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} : x_n \notin K_\varepsilon(\alpha)\}$ végtelen számosságú halmaz.

$\neg(B) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} : \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} : \quad \exists n > N, \text{ hogy } |x_n - \alpha| \geq \varepsilon.$



Divergencia

A divergenciának igazolása ez a definíció alapján elég bonyolult.
A divergens sorozatok halmazát két diszjunkt részhalmazra tudjuk bontani:

a) **van határértéke:**

Divergencia

A divergenciának igazolása ez a definíció alapján elég bonyolult.
A divergens sorozatok halmazát két diszjunkt részhalmazra tudjuk bontani:

a) **van határértéke:**

b) **nincs határértéke.** Pl.: $((-1)^n, n \in \mathbb{N})$, $((-2)^n, n \in \mathbb{N})$
sorozat

Divergencia

A divergenciának igazolása ez a definíció alapján elég bonyolult.
A divergens sorozatok halmazát két diszjunkt részhalmazra tudjuk bontani:

a) **van határértéke:**

- **határértéke** $+\infty$: Pl.: $(n^3, n \in \mathbb{N})$, $(2^n, n \in \mathbb{N})$ sorozat

b) **nincs határértéke.** Pl.: $((-1)^n, n \in \mathbb{N})$, $((-2)^n, n \in \mathbb{N})$ sorozat

Divergencia

A divergenciának igazolása ez a definíció alapján elég bonyolult.
A divergens sorozatok halmazát két diszjunkt részhalmazra tudjuk bontani:

a) **van határértéke:**

- **határértéke** $+\infty$: Pl.: $(n^3, n \in \mathbb{N})$, $(2^n, n \in \mathbb{N})$ sorozat
- **határértéke** $-\infty$: Pl.: $(-n^3, n \in \mathbb{N})$, $(-2^n, n \in \mathbb{N})$ sorozat

b) **nincs határértéke.** Pl.: $((-1)^n, n \in \mathbb{N})$, $((-2)^n, n \in \mathbb{N})$
sorozat

Végtelen határérték

Definíció

Az $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat **határértéke** $+\infty$, ha

(A) $\forall \varepsilon > 0 \quad V^\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$ véges.

(B) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N$ esetén $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$

Végtelen határérték

Definíció

Az $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat **határértéke** $+\infty$, ha

(A) $\forall \varepsilon > 0 \quad V^\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$ véges.

(B) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \text{ esetén } x_n > \frac{1}{\varepsilon}$

Az $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat **határértéke** $-\infty$, ha

(A) $\forall \varepsilon > 0 \quad V^\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} : x_n \geq -\frac{1}{\varepsilon}\}$ véges.

(B) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \forall n > N \text{ esetén } x_n < -\frac{1}{\varepsilon}$

Ha az $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sorozat **divergens és nincs határértéke**, akkor a divergenciát a 3. következmény alapján célszerű igazolni, azaz keresünk két olyan részsorozatot, melynek határértéke létezik, de különböző. (Akkor is használható ez a megoldás, ha a részsorozat határértéke végtelen.)

Monoton sorozatok határértéke

Tétel

Legyen $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ($x = (x_n, n \in \mathbb{N})$) egy monoton számsorozat.
Ekkor az x sorozatnak mindig létezik határértéke. Ha $x = (x_n)$

- *korlátos, akkor konvergens, és*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup(x_n), \quad \text{ha } (x_n) \text{ monoton nő,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf(x_n), \quad \text{ha } (x_n) \text{ monoton csökken,}$$

- *nem korlátos, akkor*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \text{ha } (x_n) \text{ monoton nő,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty, \quad \text{ha } (x_n) \text{ monoton csökken.}$$

Monoton sorozatok határértéke

Megjegyzés

Ezt a tételt két esetben tudjuk használni a gyakorlatban:

1. *Ha nem tudom megsejteni egy sorozat határértékét, de sejttem, hogy konvergens, és be tudom látni, hogy*

- *korlátos és*
- *monoton,*

akkor abból már következik, hogy konvergens is, igaz nem tudjuk megállapítani, hogy mi a határértéke.

Így vizsgáljuk meg az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}^$ sorozat konvergenciáját.*

2. *Ha egy sorozatról tudjuk, hogy*

- *konvergens és*
- *monoton,*

akkor a határérték megadja a szuprémumot monoton növekedő, az infimumot monoton csökkenő esetben.

Gyakorló feladatok 2

Feladat

Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatok monotonitás, konvergencia és korlátosság szempontjából, határozzuk meg a szélsőértékeket, és szuprérumot, infimumot!

- a) $x_n = \frac{4n+3}{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$
- b) $x_n = \frac{4n+3}{2n-7} \quad (n \in \mathbb{N})$
- c) $x_n = 1 + \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- d) $x_n = n^2 - n + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$
- e) $x_n = (-1)^n \cdot n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- f) $x_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás a)

$$\begin{aligned} \left| \frac{4n+3}{2n+1} - 2 \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{4n+3}{2n+1} - \frac{2(2n+1)}{2n+1} \right| &< \varepsilon \\ \left| \frac{1}{2n+1} \right| &< \varepsilon & / \frac{1}{2n+1} > 0 \\ \frac{1}{2n+1} &< \varepsilon & / \frac{1}{2n+2} > 0, \text{ reciprok} \\ 2n+1 &> \frac{1}{\varepsilon} & / -1/ : 2 \\ n &> \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Innen látszik, hogy $N := \left\lceil \left| \frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{2} \right| \right\rceil + 1$ választással teljesül az állítás.

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás a)

Korlátosság, szélsőérték:

Felső korlát, maximum: A sorozat szigorúan monoton csökken.

$$\Downarrow \\ \exists \quad \max(x_n) = x_0 = 3.$$

$$\Downarrow \\ \exists \quad \sup(x_n) = \max(x_n) = 3.$$

Alsó korlát, minimum: 1. A sorozat konvergens. $\xRightarrow{\text{Konv. 2. köv.}}$

Korlátos.

2. A sorozat monoton csökken és korlátos.

$$\Downarrow \text{ Monoton sorozatok határértékére von. t. } \\ \exists \quad \inf(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 2. \\ \Downarrow$$

$$\text{Ha } \exists \quad \min(x_n), \text{ akkor } \min(x_n) = \inf(x_n) = 2.$$

Mivel nem létezik olyan n , melyre $x_n = 2$, ezért nincs minimum. $\square$

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás b)

Monotonitás: Korábban beláttuk, hogy (x_n) szigorúan monoton csökken, ha $n > 3$.

Konvergencia: Ha $n \gg 1$, akkor $x_n \approx \frac{4}{2} = 2$, innen adódik a sejtés, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+3}{2n-7} = 2$.

Ezt definíció alapján igazoljuk.

$$\forall \varepsilon > 0 \stackrel{?}{\exists} N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \text{ha } n > N, \text{ akkor } \left| \frac{4n+3}{2n-7} - 2 \right| < \varepsilon.$$

Kiindunk a kívánt egyenlőtlenségből és ekvivalens átalakításokkal kifejezzük belőle n -et.

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás b)

$$\left| \frac{4n+3}{2n-7} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{4n+3}{2n-7} - \frac{2(2n-7)}{2n-7} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{17}{2n-7} \right| < \varepsilon \quad / \frac{1}{2n-7} > 0, \text{ T.f.h. } n > 3$$

$$0 < \frac{1}{2n-7} < \varepsilon \quad / \text{reciprok}$$

$$2n-7 > \frac{1}{\varepsilon} \quad / +7/ : 2$$

$$n > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{7}{2}$$

Innen látszik, hogy $N := \left[\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{7}{2} \right] + 1 > 3$ választással teljesül az állítás.

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás b)

Korlátosság, szélsőérték:

Szükségünk lesz rá: $x_0 = -\frac{3}{7}$, $x_1 = -\frac{7}{5}$, $x_2 = -\frac{11}{3}$, $x_3 = -15$

Felső korlát, maximum: (x_n) szig. mon. csökken, ha $n > 0$.

⇓

$$\exists \max\{x_n, n > 3\} = x_4 = 19.$$

⇓

$$\exists \sup(x_n) = \max(x_n) = \max\{x_0, x_1, x_2, x_3, 19\} = 19.$$

Alsó korlát, minimum: 1. A sorozat konvergens. $\xRightarrow{\text{Konv. 2. köv.}}$

Korlátos.

2. A sorozat monoton csökken, ha $n > 3$ és korlátos.

⇓ Monoton sorozatok határértékére von. t.

$$\exists \inf\{x_n, n > 3\} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 2.$$

$$\Downarrow \min\{x_0, x_1, x_2, x_3, 2\} = -15$$

$$\exists \min(x_n), \inf(x_n) \text{ és } \min(x_n) = \inf(x_n) = -15.$$

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás c)

Monotonitás: Korábban beláttuk, hogy (x_n) szigorúan monoton csökken.

Konvergencia: Ha $n \gg 1$, akkor $x_n \approx 1$, innen adódik a sejtés, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 2$.

Ezt definíció alapján igazoljuk.

$$\forall \varepsilon > 0 \stackrel{?}{\exists} N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \text{ha } n > N, \text{ akkor } \left| 1 + \frac{1}{n^2} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Kiindunk a kívánt egyenlőtlenségből és ekvivalens átalakításokkal kifejezzük belőle n -et.

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás c)

$$\left| 1 + \frac{1}{n^2} - 1 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{n^2} \right| < \varepsilon \quad / \frac{1}{n^2} > 0$$

$$0 < \frac{1}{n^2} < \varepsilon \quad / \text{reciprok}$$

$$n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \quad / \sqrt{}, n > 0$$

$$n > \sqrt{\varepsilon}$$

Innen látszik, hogy $N := [\sqrt{\varepsilon}] + 1$ választással teljesül az állítás (a +1 el is hagyható).

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás c)

Korlátosság, szélsőérték:

Felső korlát, maximum: A sorozat szigorúan monoton csökken.

$$\Downarrow$$
$$\exists \max(x_n) \quad \text{és} \quad \max(x_n) = x_1 = 2.$$

$$\Downarrow$$
$$\exists \sup(x_n) \quad \text{és} \quad \sup(x_n) = \max(x_n) = 2.$$

Alsó korlát, minimum: 1. A sorozat konvergens. $\xRightarrow{\text{Konv. 2. köv.}}$

Korlátos.

2. A sorozat monoton csökken és korlátos.

$$\Downarrow \text{ Monoton sorozatok határértékére von. t.}$$
$$\exists \inf(x_n) \quad \text{és} \quad \inf(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = 1.$$

$$\Downarrow$$
$$\text{Ha } \exists \min(x_n), \text{ akkor } \min(x_n) = \inf(x_n) = 1.$$

Mivel nem létezik olyan n , melyre $x_n = 1$, ezért nincs minimum. $\square$

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás d)

Monotonitás: Korábban beláttuk, hogy (x_n) szigorúan monoton nő.

Konvergencia: Ha $n \gg 1$, akkor $x_n \approx n^2$, innen adódik a sejtés, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n + 1 = +\infty$.

Ezt definíció alapján igazoljuk.

$$\forall \varepsilon > 0 \stackrel{?}{\exists} N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \quad \text{ha } n > N, \text{ akkor } n^2 - n + 1 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Kiindunk a kívánt egyenlőtlenségből és becsléssel egy egyszerűbb egyenlőtlenséget oldunk meg. Ehhez megvizsgáljuk, hogy az $\frac{n^2}{2} \geq n$ feltétel mikortól teljesül. Ekvivalens átalakítással kapjuk, hogy pontosan akkor, ha $n \geq 2$.

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás d)

$$n^2 - n + 1 \geq n^2 - \frac{n^2}{2} + 0 = \frac{n^2}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \quad / \text{feltéve, hogy } n \geq 2$$

$$\frac{n^2}{2} > \frac{1}{\varepsilon} \quad / \cdot 2$$

$$n^2 > \frac{2}{\varepsilon} \quad / \sqrt{\text{sz. mon n} \circ, \text{ ha } n \geq 0}$$

$$n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$$

Innen a $\geq$ reláció tranzitivitása miatt $N := \left\lceil \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right\rceil + 1$ választással teljesül az állítás. (A $+1$ miatt az $n \geq 2$ feltétel is biztosan teljesül.)

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás d)

Korlátosság, szélsőérték:

Felső korlát, maximum:

A sorozat határértéke $+\infty$.



(x_n) nem korlátos felülről, azaz $\sup(x_n) = +\infty$ és nincs maximuma.

Alsó korlát, minimum:

A sorozat szigorúan monotonon nő.



$\exists \min(x_n), \quad \text{és} \quad \min(x_n) = x_0 = 1.$



$\exists \inf(x_n), \quad \text{és} \quad \inf(x_n) = \min(x_n) = 1.$



Gyakorló feladatok 2 – Megoldás e)

Monotonitás:

Korábban beláttuk, hogy (x_n) nem monoton. Azonban

$x_{2n} = 2n$ ($n \in \mathbb{N}$) szigorúan monoton nő,

és $x_{2n+1} = -(2n+1)$ ($n \in \mathbb{N}$) szigorúan monoton csökken, hiszen

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{2(n+1)} - x_{2n} = 2(n+1) - 2n = 2 > 0 \text{ és}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{2(n+1)+1} - x_{2n+1} = -(2n+3) - (-(2n+1)) = -2 < 0.$$

A korlátosság és a konvergencia megállapításához célszerű ezeket a részsorozatokot vizsgálni először.

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás e)

Konvergencia (folytatás):

Beláttuk, hogy a páros és páratlan indexű részsorozatok divergensek, de létezik határértékük.



Ezek a határértékek különböznek.



Az eredeti sorozat divergens és nincs határértéke.

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás f)

Monotonitás:

Korábban beláttuk, hogy (x_n) nem monoton. Azonban

$x_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2n}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) szigorúan monoton csökken,

és $x_{2n+1} = -\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) szigorúan monoton csökken, hiszen

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_{2(n+1)} - x_{2n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2n+2}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) < 0 \text{ és}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_{2(n+1)+1} - x_{2n+1} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2n+3}} + \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right) > 0.$$

A korlátosság és a konvergencia megállapításához célszerű ezeket a részsorozatok vizsgálni először.

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás f)

Konvergencia (folytatás):

Beláttuk, hogy a páros és páratlan indexű részsorozatok konvergensek és határértékük nulla.



A részsorozatok határértéke megygyezik és fésűs egyesítésük kiadja az eredeti sorozatot.



Az eredeti sorozat is konvergens és határértéke nulla.

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás f)

(x_{2n}) korlátossága, szélsőértéke:

Felső korlát, maximum: (x_{2n}) szigorúan monoton csökken.

$$\Downarrow \\ \exists \max(x_{2n}) \quad \text{és} \quad \max(x_{2n}) = x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Downarrow \\ \exists \sup(x_{2n}) \quad \text{és} \quad \sup(x_{2n}) = \max(x_{2n}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Alsó korlát, minimum: 1. (x_{2n}) konvergens. $\xRightarrow{\text{Konv. 2. köv.}}$ Korlátos.
2. A sorozat monoton csökken és korlátos.

$\Downarrow$ Monoton sorozatok határértékére von. t.

$$\exists \inf(x_{2n}) \quad \text{és} \quad \inf(x_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n}) = 0.$$

$\Downarrow$

$$\text{Ha } \exists \min(x_{2n}), \text{ akkor } \min(x_{2n}) = \inf(x_{2n}) = 0.$$

Mivel nem létezik olyan n , melyre $x_{2n} = 0$, ezért nincs minimum. $\square$

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás f)

(x_{2n+1}) korlátossága, szélsőértéke: *Felső korlát, maximum:*

(x_{2n+1}) konvergens.

⇓ Konv. 2. köv.

(x_{2n+1}) korlátos.

⇓ (x_{2n}) monoton nő;
Monoton sorozatok határértékére von. t.

$$\exists \sup(x_{2n+1}) \quad \text{és} \quad \sup(x_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{2n+1}) = 0.$$

⇓

Ha $\exists \max(x_{2n+1})$, akkor $\max(x_{2n+1}) = \sup(x_{2n+1}) = 0$.

Mivel nem létezik olyan n , melyre $x_{2n+1} = 0$, ezért nincs maximum.

Alsó korlát, minimum: (x_{2n+1}) szigorúan monoton nő.

⇓

$$\exists \min(x_{2n+1}) \quad \text{és} \quad \min(x_{2n+1}) = x_1 = -1.$$

⇓

$$\exists \inf(x_{2n+1}) \quad \text{és} \quad \inf(x_{2n+1}) = \min(x_{2n+1}) = -1.$$

Gyakorló feladatok 2 – Megoldás f)

(x_n) korlátossága, szélsőértéke: Beláttuk, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq x_{2n+1} < 0 \quad \text{és} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 < x_{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Downarrow$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_1 = -1 \leq x_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = x_2.$$

$$\Downarrow$$
$$\exists \max(x_n), \text{ és } \min(x_n), \text{ és } \max(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \min(x_n) = -1$$

$$\Downarrow$$
$$\exists \sup(x_n), \inf(x_n) \text{ és}$$
$$\sup(x_n) = \max(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \inf(x_n) = \min(x_n) = -1.$$



Házi feladat

Feladat

Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatok monotonitás, konvergencia és korlátosság szempontjából, határozzuk meg a szélsőértékeit, és a supremumát, infimumát!

a) $x_n = \frac{3-n}{2n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$

b) $x_n = \frac{n-1}{3n-8} \quad (n \in \mathbb{N})$

c) $x_n = 2^{\frac{n}{4}+1} \quad (n \in \mathbb{N})$

d) $x_n = 2^{-\frac{n}{4}+2} \quad (n \in \mathbb{N})$