

Analízis alapjai I.

Logikai műveletek, formalizálás, tagadás és alkalmazása az analízis alapfogalmaiban, mint halmazok korlátossága szélsőértéke.

Eisner Tímea

Pécsi Tudományegyetem
Matematikai és Informatikai Intézet



Definíció

*Az olyan kijelentő mondatot, amely az „igaz” és a „hamis” tulajdonságok közül pontosan az egyikkel rendelkezik, **kijelentésnek (állításnak, ítéletnek)** nevezzük.*

Az igaz (i) és a hamis (h) tulajdonságok a kijelentésnek igazságértékei vagy logikai értékei.

Tekintsük a következő két kijelentést.

p : A leírt szám kétjegyű.

q : A leírt szám páros.

Ha például a leírt szám 53, erre $|p| = i$, $|q| = h$, a kijelentés **interpretációja**.

Műveletek

A logikában, a számokhoz hasonlóan bevezetünk műveleteket. Vannak egyváltozós, kétváltozós, stb, többváltozós műveletek. Mi csak az egyváltozós és a kétváltozós műveletekkel foglalkozunk. Műveletekkel újabb kijelentésekhez jutunk. Mivel az interpretációk száma véges, ezért ezeket a műveleteket értéktáblázattal értelmezhetjük.

Tagadás: Egyváltozós művelet. A q állítás tagadása $\neg q$.
Értéktáblázata:

q	$\neg q$
i	h
h	i

Például: "A leírt szám nem páros" = nem $q = \neg q$.
Ezután tagadjuk $\neg q$ -t. Mi lesz a logikai értéke?

Műveletek

A logikában, a számokhoz hasonlóan bevezetünk műveleteket. Vannak egyváltozós, kétváltozós, stb, többváltozós műveletek. Mi csak az egyváltozós és a kétváltozós műveletekkel foglalkozunk. Műveletekkel újabb kijelentésekhez jutunk. Mivel az interpretációk száma véges, ezért ezeket a műveleteket értéktáblázattal értelmezhetjük.

Tagadás: Egyváltozós művelet. A q állítás tagadása $\neg q$.
Értéktáblázata:

q	$\neg q$
i	h
h	i

Például: "A leírt szám nem páros" = nem $q = \neg q$.
Ezután tagadjuk $\neg q$ -t. Mi lesz a logikai értéke?
Nyilván q . Tagadás tagadása!

Kétváltozós műveletek

Diszjunkció: A " p vagy q " $= p \vee q$ akkor és csak akkor hamis, ha p és q is hamis.

Konjunkció: A " p és q " $= p \wedge q$ akkor és csak akkor igaz, ha p és q is igaz.

Implikáció: A " p ha, akkor q " $= p \Rightarrow q$ akkor és csak akkor hamis, ha p igaz és q hamis.

Ekvivalencia: A " p akkor és csak akkor, ha q " $= p \Leftrightarrow q$ akkor és csak akkor igaz, ha p és q is igaz, vagy p és q is hamis.

Kétváltozós műveletek

A leggyakrabban használt kétváltozós műveletek értéktáblázata:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
i	i	i	i	i	i
i	h	i	h	h	h
h	i	i	h	i	h
h	h	h	h	i	i

Ekvivalens formulák

A matematikai bizonyítások során szükségünk van néhány ekvivalens átalakításra. Ezeket az ekvivalenciákat is értéktáblázattal tudjuk igazolni.

p	q	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
i	i	h	h	i	i	h	h
i	h	h	h	h	h	i	i
h	i	h	h	i	i	i	i
h	h	i	i	i	i	i	i

Ezzel beláttuk, hogy

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q.$$

Az első kettő formulát De Morgan azonosságoknak nevezzük.

Formalizálás és tagadás

Feladat

Formalizáljuk az alábbi mondatokat, tagadjuk, majd fogalmazzuk meg a tagadást szövegesen.

1. Panna a hétvégén zserbót és rétest süített.
2. Ha véget ér a járvány, akkor az egyetemen lesznek megtartva az órák.
3. Ha Janka gőgös vagy zsémbes, nem szereti Andrist.
4. Ha esik, nem megyünk futni.
5. Akár esik, akár nem, elmegyek futni.
6. Ha vénasszonyok potyognak az égből, akkor mindenkinek ötöst adok, és mindenkit meghívok egy sütire.

Megoldás

1. Panna a hétvégén zserbót és rétest sütött.

Megoldás

1. Panna a hétvégén zserbót és rétest sütt.

Formula: $p \wedge q$, ahol

p = Panna a hétvégén zserbót sütt.

q = Panna a hétvégén rétest sütt.

Megoldás

1. Panna a hétvégén zserbót és rétest sütött.

Formula: $p \wedge q$, ahol

p = Panna a hétvégén zserbót sütött.

q = Panna a hétvégén rétest sütött.

Tagadva: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Megoldás

1. Panna a hétvégén zserbót és rétest süttött.

Formula: $p \wedge q$, ahol

p = Panna a hétvégén zserbót süttött.

q = Panna a hétvégén rétest süttött.

Tagadva: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Szövegesen: Panna a hétvégén zserbót vagy rétest nem süttött.

2. Ha véget ér a járvány, akkor az egyetemen lesznek megtartva az órák.

Megoldás

1. Panna a hétvégén zserbót és rétest sütt.

Formula: $p \wedge q$, ahol

p = Panna a hétvégén zserbót sütt.

q = Panna a hétvégén rétest sütt.

Tagadva: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Szövegesen: Panna a hétvégén zserbót vagy rétest nem sütt.

2. Ha véget ér a járvány, akkor az egyetemen lesznek megtartva az órák.

Formula: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, ahol

p = Véget ér a járvány.

q = Az egyetemen lesznek megtartva az órák.

Megoldás

1. Panna a hétvégén zserbót és rétest sütt.

Formula: $p \wedge q$, ahol

p = Panna a hétvégén zserbót sütt.

q = Panna a hétvégén rétest sütt.

Tagadva: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Szövegesen: Panna a hétvégén zserbót vagy rétest nem sütt.

2. Ha véget ér a járvány, akkor az egyetemen lesznek megtartva az órák.

Formula: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, ahol

p = Véget ér a járvány.

q = Az egyetemen lesznek megtartva az órák.

Tagadva: $\neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$

Megoldás

1. Panna a hétvégén zserbót és rétest sütt.

Formula: $p \wedge q$, ahol

p = Panna a hétvégén zserbót sütt.

q = Panna a hétvégén rétest sütt.

Tagadva: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Szövegesen: Panna a hétvégén zserbót vagy rétest nem sütt.

2. Ha véget ér a járvány, akkor az egyetemen lesznek megtartva az órák.

Formula: $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, ahol

p = Véget ér a járvány.

q = Az egyetemen lesznek megtartva az órák.

Tagadva: $\neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q$

Szövegesen: Véget ér a járvány, és nem az egyetemen lesznek megtartva az órák.

Megoldás

3. Ha Janka gőgös vagy zsémbes, nem szereti Andrist.

Megoldás

3. Ha Janka gőgös vagy zsémbes, nem szereti Andrist.

Formula: $(p \wedge q) \Rightarrow \neg r \equiv \neg(p \vee q) \vee \neg r$, ahol

p = Janka gőgös.

q = Janka zsémbes.

r = Janka szereti Andrist.

Megoldás

3. Ha Janka gőgös vagy zsémbes, nem szereti Andrist.

Formula: $(p \wedge q) \Rightarrow \neg r \equiv \neg(p \vee q) \vee \neg r$, ahol

p = Janka gőgös.

q = Janka zsémbes.

r = Janka szereti Andrist.

Tagadva: $\neg(\neg(p \vee q) \vee \neg r) \equiv (p \vee q) \wedge r$

Megoldás

3. Ha Janka gőgös vagy zsémbes, nem szereti Andrist.

Formula: $(p \wedge q) \Rightarrow \neg r \equiv \neg(p \vee q) \vee \neg r$, ahol

p = Janka gőgös.

q = Janka zsémbes.

r = Janka szereti Andrist.

Tagadva: $\neg(\neg(p \vee q) \vee \neg r) \equiv (p \vee q) \wedge r$

Szövegesen: Janka gőgös vagy zsémbes, és szereti Andrist.

4. Ha esik, nem megyünk futni.

Megoldás

3. Ha Janka gőgös vagy zsémbes, nem szereti Andrist.

Formula: $(p \wedge q) \Rightarrow \neg r \equiv \neg(p \vee q) \vee \neg r$, ahol

p = Janka gőgös.

q = Janka zsémbes.

r = Janka szereti Andrist.

Tagadva: $\neg(\neg(p \vee q) \vee \neg r) \equiv (p \vee q) \wedge r$

Szövegesen: Janka gőgös vagy zsémbes, és szereti Andrist.

4. Ha esik, nem megyünk futni.

Formula: $p \Rightarrow \neg q \equiv \neg p \vee \neg q$, ahol

p = Esik.

q = Futni megyünk.

Megoldás

3. Ha Janka gőgös vagy zsémbes, nem szereti Andrist.

Formula: $(p \wedge q) \Rightarrow \neg r \equiv \neg(p \vee q) \vee \neg r$, ahol

p = Janka gőgös.

q = Janka zsémbes.

r = Janka szereti Andrist.

Tagadva: $\neg(\neg(p \vee q) \vee \neg r) \equiv (p \vee q) \wedge r$

Szövegesen: Janka gőgös vagy zsémbes, és szereti Andrist.

4. Ha esik, nem megyünk futni.

Formula: $p \Rightarrow \neg q \equiv \neg p \vee \neg q$, ahol

p = Esik.

q = Futni megyünk.

Tagadva: $\neg(\neg p \vee \neg q) \equiv p \wedge q$

Megoldás

3. Ha Janka gőgös vagy zsémbes, nem szereti Andrist.

Formula: $(p \wedge q) \Rightarrow \neg r \equiv \neg(p \vee q) \vee \neg r$, ahol

p = Janka gőgös.

q = Janka zsémbes.

r = Janka szereti Andrist.

Tagadva: $\neg(\neg(p \vee q) \vee \neg r) \equiv (p \vee q) \wedge r$

Szövegesen: Janka gőgös vagy zsémbes, és szereti Andrist.

4. Ha esik, nem megyünk futni.

Formula: $p \Rightarrow \neg q \equiv \neg p \vee \neg q$, ahol

p = Esik.

q = Futni megyünk.

Tagadva: $\neg(\neg p \vee \neg q) \equiv p \wedge q$

Szövegesen: Esik és megyünk futni.

Megoldás

5. Akár esik, akár nem, elmegyek futni.

Megoldás

5. Akár esik, akár nem, elmegyek futni.

Formula: $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q \equiv \neg(p \vee \neg p) \vee q \equiv q$, ahol

$p =$ Esik.

$q =$ Futni megyek.

Megoldás

5. Akár esik, akár nem, elmegyek futni.

Formula: $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q \equiv \neg(p \vee \neg p) \vee q \equiv q$, ahol

$p =$ Esik.

$q =$ Futni megyek.

Tagadva: $\neg q$

Megoldás

5. Akár esik, akár nem, elmegyek futni.

Formula: $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q \equiv \neg(p \vee \neg p) \vee q \equiv q$, ahol

$p =$ Esik.

$q =$ Futni megyek.

Tagadva: $\neg q$

Szövegesen: Nem megyek futni.

6. Ha vénasszonyok potyognak az égből, akkor mindenkinek ötöst adok, és mindenkit meghívok egy sütire.

Megoldás

5. Akár esik, akár nem, elmegyek futni.

Formula: $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q \equiv \neg(p \vee \neg p) \vee q \equiv q$, ahol

$p =$ Esik.

$q =$ Futni megyek.

Tagadva: $\neg q$

Szövegesen: Nem megyek futni.

6. Ha vénasszonyok potyognak az égből, akkor mindenkinek ötöst adok, és mindenkit meghívok egy sütire.

Formula: $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv \neg p \vee (q \wedge r)$, ahol

$p =$ Vénasszonyok potyognak az égből.

$q =$ Mindenkinek ötöst adok.

$r =$ Mindenkit meghívok egy sütire.

Megoldás

5. Akár esik, akár nem, elmegyek futni.

Formula: $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q \equiv \neg(p \vee \neg p) \vee q \equiv q$, ahol

p = Esik.

q = Futni megyek.

Tagadva: $\neg q$

Szövegesen: Nem megyek futni.

6. Ha vénasszonyok potyognak az égből, akkor mindenkinek ötöst adok, és mindenkit meghívok egy sütire.

Formula: $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv \neg p \vee (q \wedge r)$, ahol

p = Vénasszonyok potyognak az égből.

q = Mindenkinek ötöst adok.

r = Mindenkit meghívok egy sütire.

Tagadva: $\neg(\neg p \vee (q \wedge r)) \equiv p \wedge \neg(q \wedge r) \equiv p \wedge (\neg q \vee \neg r)$

Megoldás

5. Akár esik, akár nem, elmegyek futni.

Formula: $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q \equiv \neg(p \vee \neg p) \vee q \equiv q$, ahol

$p =$ Esik.

$q =$ Futni megyek.

Tagadva: $\neg q$

Szövegesen: Nem megyek futni.

6. Ha vénasszonyok potyognak az égből, akkor mindenkinek ötöst adok, és mindenkit meghívok egy sütire.

Formula: $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv \neg p \vee (q \wedge r)$, ahol

$p =$ Vénasszonyok potyognak az égből.

$q =$ Mindenkinek ötöst adok.

$r =$ Mindenkit meghívok egy sütire.

Tagadva: $\neg(\neg p \vee (q \wedge r)) \equiv p \wedge \neg(q \wedge r) \equiv p \wedge (\neg q \vee \neg r)$

Szövegesen: Vénasszonyok potyognak az égből, és nem adok mindenkinek ötöst vagy nem hívok meg mindenkit egy sütire.

Formalizálás és tagadás

Feladat

Tagadjuk az alábbi mondatokat, igyekezzünk úgy megfogalmazni őket, hogy ne legyen benne "nem".

1. Janka alacsonyabb Andrásnál.
2. András a legmagasabb az osztályban.
3. Távcsővel akármeddig ellátunk.
4. Valakinek van gyereke.
5. Minden embernek van édesanyja.
6. Az emberi élethossz biztosan rövidebb, mint 140 év.
7. Egy érmével dobva az eredmény fej lett.

Megoldás

1. Janka alacsonyabb Andrásnál.

Megoldás

1. Janka alacsonyabb Andrásnál.

Tagadás: Janka legalább akkora, mint András.

2. András a legmagasabb az osztályban.

Megoldás

1. Janka alacsonyabb Andrásnál.

Tagadás: Janka legalább akkora, mint András.

2. András a legmagasabb az osztályban.

Tagadás: Van Andrásnál magasabb gyerek az osztályban.

3. Távcsővel akármeddig ellátunk.

Megoldás

1. Janka alacsonyabb Andrásnál.

Tagadás: Janka legalább akkora, mint András.

2. András a legmagasabb az osztályban.

Tagadás: Van Andrásnál magasabb gyerek az osztályban.

3. Távcsővel akármeddig ellátunk.

Tagadás: Van olyan távolság, ameddig nem látunk el.

4. Valakinek van gyereke.

Megoldás

1. Janka alacsonyabb Andrásnál.

Tagadás: Janka legalább akkora, mint András.

2. András a legmagasabb az osztályban.

Tagadás: Van Andrásnál magasabb gyerek az osztályban.

3. Távcsővel akármeddig ellátunk.

Tagadás: Van olyan távolság, ameddig nem látunk el.

4. Valakinek van gyereke.

Tagadás: Senkinek nincs gyereke.

5. Minden embernek van édesanyja.

Megoldás

1. Janka alacsonyabb Andrásnál.

Tagadás: Janka legalább akkora, mint András.

2. András a legmagasabb az osztályban.

Tagadás: Van Andrásnál magasabb gyerek az osztályban.

3. Távcsővel akármeddig ellátunk.

Tagadás: Van olyan távolság, ameddig nem látunk el.

4. Valakinek van gyereke.

Tagadás: Senkinek nincs gyereke.

5. Minden embernek van édesanyja.

Tagadás: Van olyan ember, akinek nincs édesanyja.

6. Az emberi élethossz biztosan rövidebb, mint 140 év.

Megoldás

1. Janka alacsonyabb Andrásnál.

Tagadás: Janka legalább akkora, mint András.

2. András a legmagasabb az osztályban.

Tagadás: Van Andrásnál magasabb gyerek az osztályban.

3. Távcsővel akármeddig ellátunk.

Tagadás: Van olyan távolság, ameddig nem látunk el.

4. Valakinek van gyereke.

Tagadás: Senkinek nincs gyereke.

5. Minden embernek van édesanyja.

Tagadás: Van olyan ember, akinek nincs édesanyja.

6. Az emberi élethossz biztosan rövidebb, mint 140 év.

Tagadás: Volt olyan ember, aki legalább 140 évig élt.

7. Egy érmével dobva az eredmény fej lett.

Megoldás

1. Janka alacsonyabb Andrásnál.

Tagadás: Janka legalább akkora, mint András.

2. András a legmagasabb az osztályban.

Tagadás: Van Andrásnál magasabb gyerek az osztályban.

3. Távcsővel akármeddig ellátunk.

Tagadás: Van olyan távolság, ameddig nem látunk el.

4. Valakinek van gyereke.

Tagadás: Senkinek nincs gyereke.

5. Minden embernek van édesanyja.

Tagadás: Van olyan ember, akinek nincs édesanyja.

6. Az emberi élethossz biztosan rövidebb, mint 140 év.

Tagadás: Volt olyan ember, aki legalább 140 évig élt.

7. Egy érmével dobva az eredmény fej lett.

Tagadás: Egy érmével dobva az eredmény írás lett.

Miben különböznek ezek a tagadások az előző feladatcsokorban lévőktől?

A kijelentések finomszerkezete

A legtöbb kijelentés valakiről (vagy valamiről) valamit állít. Például:

<u>Antal</u>	<u>tanul</u>	.
Akiről állítunk.	Ezt állítjuk (prédikáljuk)	
Az egyed vagy egyén neve	<i>predikátum</i>	
<i>individuum</i>	<u>jele</u> : (egy nagybetű) <i>T</i>	
<u>jele</u> : (egy kisbetű) <i>a</i>		

A kijelentés jelölése: Ta

- A predikátumokat logikai függvényeknek is nevezzük, a függvény változóit individuumváltozónak nevezzük.
- Predikátumlogikai műveletek A predikátumlogika a kijelentéslogika általánosítása. Emiatt a kijelentéslogikai műveleteket predikátumokra is alkalmazhatjuk.

Predikátumból kijelentés - konkretizáció

Példa

Az „ $Sxy := x$ segít y -nak” logikai függvényből állítsuk elő a „Péter segít Rékának, de Zolinak nem segít.” kijelentést úgy, hogy az individuumváltozók helyébe konkrét individuumneveket írunk.

Predikátumból kijelentés - konkretizáció

Példa

Az „ $Sxy := x$ segít y -nak” logikai függvényből állítsuk elő a „Péter segít Rékának, de Zolinak nem segít.” kijelentést úgy, hogy az individuumváltozók helyébe konkrét individuumneveket írunk.

Megoldás. $S_{pr} \wedge \neg S_{pz}$



Predikátumból kijelentés - konkretizáció

Példa

Az „ $Sxy := x$ segít y -nak” logikai függvényből állítsuk elő a „Péter segít Rékának, de Zolinak nem segít.” kijelentést úgy, hogy az *individuumváltozók helyébe konkrét individuumneveket írunk.*

Megoldás. $S_{pr} \wedge \neg S_{pz}$



Definíció

*Logikai függvényből kijelentéseket képezünk azáltal, hogy **individuumváltozó helyébe konkrét individuumnevet írunk.** Ezt **konkretizációnak** nevezzük.*

Predikátumból kijelentés - kvantifikáció

Példa

A „ $Tx := x \text{ tanul}$ ” predikátumból képezzük a „Mindenki tanul.” és „Valaki tanul.” kijelentéseket!

Predikátumból kijelentés - kvantifikáció

Példa

A „ $Tx := x$ tanul” predikátumból képezzük a „Mindenki tanul.” és „Valaki tanul.” kijelentéseket!

Predikátumból kijelentés - kvantifikáció

Példa

A „ $Tx := x$ tanul” predikátumból képezzük a „Mindenki tanul.” és „Valaki tanul.” kijelentéseket!

Megoldás.

Mindenki tanul.= Minden x Tx

Valaki tanul.= Létezik x Tx .



Predikátumból kijelentés - kvantifikáció

Példa

A „ $Tx := x$ tanul” predikátumból képezzük a „Mindenki tanul.” és „Valaki tanul.” kijelentéseket!

Megoldás.

Mindenki tanul.= Minden x Tx

Valaki tanul.= Létezik x Tx .



Definíció

Legyen A egy tetszőleges, de az x individuumváltozót tartalmazó predikátumnak a formulája. Az A formulából a

Predikátumból kijelentés - kvantifikáció

Példa

A „ $Tx := x$ tanul” predikátumból képezzük a „Mindenki tanul.” és „Valaki tanul.” kijelentéseket!

Megoldás.

Mindenki tanul.= Minden x Tx

Valaki tanul.= Létezik x Tx .



Definíció

Legyen A egy tetszőleges, de az x individuumváltozót tartalmazó predikátumnak a formulája. Az A formulából a

- $\forall x (\in I)$ A formula képzését **univerzális (átlános) kvantifikációnak**,
- a $\exists x (\in I)$ A formula képzését pedig **egzisztenciális (létezési) kvantifikációnak** nevezzük.

A „ $\forall$ ” jelet univerzális kvantornak, a „ $\exists$ ” jelet egzisztenciális kvantornak nevezzük.

De Morgan formulák a predikátumokra

Tétel

Ha A egy formula, melynek x individuumváltozója, akkor érvényesek a következő azonosságok:

$$\neg (\forall x A) \equiv \exists x \neg A$$

$$\neg (\exists x A) \equiv \forall x \neg A$$

Kapcsolat a feladattal

A második feladatcsokor többségénél

- kvantifikációval és konkretizációval kapott kijelentésekről van szó,

Kapcsolat a feladattal

A második feladatcsokor többségénél

- kvantifikációval és konkretizációval kapott kijelentésekről van szó,
- a predikátumok tagadása pedig egy újabb predikátum.

Ha ezt a finomszerkezetet észrevesszük, akkor a tagadás sokkal egyszerűbb.

Példa

Nézzük az egyik feladatot: *András a legmagasabb az osztályban.*

Az

Nyx : y nagyobb x -nél, azaz $Ly \geq Lx$

Példa

Nézzük az egyik feladatot: *András a legmagasabb az osztályban.*

Az

Nyx : y nagyobb x -nél, azaz $Ly \geq Lx$

predikátummal felírva kapjuk, hogy

$$\forall y(\in \text{osztály}) \quad Nay \equiv \forall y(\in \text{osztály}) \quad Ly \geq Lx,$$

Példa

Nézzük az egyik feladatot: *András a legmagasabb az osztályban.*

Az

$$Nyx: y \text{ nagyobb } x\text{-nél, azaz } Ly \geq Lx$$

predikátummal felírva kapjuk, hogy

$$\forall y(\in \text{osztály}) \quad Nay \equiv \forall y(\in \text{osztály}) \quad Ly \geq Lx,$$

melynek tagadása

$$\begin{aligned} \neg(\forall y(\in \text{osztály}) \quad Ly \geq Lx) &\equiv \exists y(\in \text{osztály}) \quad \neg(Ly \geq Lx) \equiv \\ &\equiv \exists y(\in \text{osztály}) \quad Ly < Lx. \end{aligned}$$

Szövegesen: *Van Andrásnál magasabb gyerek az osztályban.*

Példa

Nézzük az egyik feladatot: *András a legmagasabb az osztályban.*

Az

Nyx : y nagyobb x -nél, azaz $Ly \geq Lx$

predikátummal felírva kapjuk, hogy

$$\forall y(\in \text{osztály}) \quad Nay \equiv \forall y(\in \text{osztály}) \quad Ly \geq Lx,$$

melynek tagadása

$$\begin{aligned} \neg(\forall y(\in \text{osztály}) \quad Ly \geq Lx) &\equiv \exists y(\in \text{osztály}) \quad \neg(Ly \geq Lx) \equiv \\ &\equiv \exists y(\in \text{osztály}) \quad Ly < Lx. \end{aligned}$$

Példa

Nézzük az egyik feladatot: *András a legmagasabb az osztályban.*

Az

Nyx : y nagyobb x -nél, azaz $Ly \geq Lx$

predikátummal felírva kapjuk, hogy

$$\forall y(\in \text{osztály}) \quad Nay \equiv \forall y(\in \text{osztály}) \quad Ly \geq Lx,$$

melynek tagadása

$$\begin{aligned} \neg(\forall y(\in \text{osztály}) \quad Ly \geq Lx) &\equiv \exists y(\in \text{osztály}) \quad \neg(Ly \geq Lx) \equiv \\ &\equiv \exists y(\in \text{osztály}) \quad Ly < Lx. \end{aligned}$$

Szövegesen: *Van Andrásnál magasabb gyerek az osztályban.*

Kapcsolat a matematika többi területével

- A matematikai tételek, definíciók többsége olyan kijelentés, melyek tartalmaznak műveleteket, valamint predikátumok kvantifikációját és/vagy konkretizációját.
- Ha felismerjük a finomszerkezetet és tudjuk a tagadások itt felsorolt szabályait, akkor könnyen tudjuk a szigorúan matematikai kijelentéseket is tagadni.

Halmazok szélsőértéke

Definíció

Legyen $\emptyset \neq H \subseteq \mathbb{R}$.

1. Ha létezik $M \in H$ elem, melyre igaz, hogy $M \geq x$ minden $x \in H$ esetén, akkor a M számot a H **halmaz maximumának** nevezzük és a $\max H := M$ jelölést használjuk.

Logikai jelölésekkel: $\exists M \in H : \forall x \in H M \geq x$.

2. Ha létezik $m \in H$ elem, melyre igaz, hogy $m \leq x$ minden $x \in H$ esetén, akkor a m számot a H **halmaz minimumának** nevezzük és a $\min H := m$ jelölést használjuk.

Logikai jelölésekkel: $\exists m \in H : \forall x \in H m \leq x$.

Megjegyzés

Véges halmaznak mindig van mindkét szélsőértéke (maximuma és minimuma).

Szélsőérték - tagadás

Feladat

Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy egy $H \neq \emptyset$, $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak

- a) $m \in H$ nem minimuma,
- b) $M \in H$ nem maximuma,
- c) nincs minimuma,
- d) nincs maximuma.

Szélsőérték - tagadás

Megoldás.

a) $m \in H$ nem minimuma

Szélsőérték - tagadás

Megoldás.

a) $m \in H$ nem minimuma $\Leftrightarrow \exists x \in H \quad m > x$

Szélsőérték - tagadás

Megoldás.

- a) $m \in H$ nem minimuma $\Leftrightarrow \exists x \in H \quad m > x$
- b) $M \in H$ nem maximuma

Szélsőérték - tagadás

Megoldás.

a) $m \in H$ nem minimuma $\Leftrightarrow \exists x \in H \quad m > x$

b) $M \in H$ nem maximuma $\Leftrightarrow \exists x \in H \quad M < x$

Szélsőérték - tagadás

Megoldás.

- a) $m \in H$ nem minimuma $\Leftrightarrow \exists x \in H \quad m > x$
- b) $M \in H$ nem maximuma $\Leftrightarrow \exists x \in H \quad M < x$
- c) nincs minimuma

Szélsőérték - tagadás

Megoldás.

- a) $m \in H$ nem minimuma $\Leftrightarrow \exists x \in H \quad m > x$
- b) $M \in H$ nem maximuma $\Leftrightarrow \exists x \in H \quad M < x$
- c) nincs minimuma $\Leftrightarrow \forall m \in H \exists x \in H \quad m > x$

Szélsőérték - tagadás

Megoldás.

- a) $m \in H$ nem minimuma $\Leftrightarrow \exists x \in H \quad m > x$
- b) $M \in H$ nem maximuma $\Leftrightarrow \exists x \in H \quad M < x$
- c) nincs minimuma $\Leftrightarrow \forall m \in H \exists x \in H \quad m > x$
- d) nincs maximuma

Szélsőérték - tagadás

Megoldás.

- a) $m \in H$ nem minimuma $\Leftrightarrow \exists x \in H \quad m > x$
- b) $M \in H$ nem maximuma $\Leftrightarrow \exists x \in H \quad M < x$
- c) nincs minimuma $\Leftrightarrow \forall m \in H \exists x \in H \quad m > x$
- d) nincs maximuma $\Leftrightarrow \forall M \in H \exists x \in H \quad M < x$



Halmazok korlátossága

Definíció

Legyen $\emptyset \neq H \subseteq \mathbb{R}$.

- A H *halmaz felülről korlátos*, ha

$$\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in H \quad x \leq K.$$

A K valós számot a *halmaz egy felső korlátjának* nevezzük.

- A H *halmaz alulról korlátos*, ha

$$\exists k \in \mathbb{R} \forall x \in H \quad x \geq k.$$

A k valós számot a *halmaz egy alsó korlátjának* nevezzük.

- A H *halmaz korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos.

Halmazok korlátossága

Feladat

Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy egy $H \neq \emptyset$, $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaznak

- a) $k \in \mathbb{R}$ *nem alsó korlátja,*
- b) $K \in \mathbb{R}$ *nem felső korlátja,*
- c) *nem korlátos alulról,*
- d) *nem korlátos felülről,*
- e) *nem korlátos.*

Halmazok korlátossága

Megoldás.

a) H –nak $k \in \mathbb{R}$ nem alsó korlátja

Halmazok korlátossága

Megoldás.

a) H –nak $k \in \mathbb{R}$ nem alsó korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 < k$

Halmazok korlátossága

Megoldás.

- a) H – nak $k \in \mathbb{R}$ nem alsó korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 < k$
- b) H – nak $K \in \mathbb{R}$ nem felső korlátja

Halmazok korlátossága

Megoldás.

a) H – nak $k \in \mathbb{R}$ nem alsó korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 < k$

b) H – nak $K \in \mathbb{R}$ nem felső korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 > K$

Halmazok korlátossága

Megoldás.

- a) H –nak $k \in \mathbb{R}$ nem alsó korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 < k$
- b) H –nak $K \in \mathbb{R}$ nem felső korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 > K$
- c) H nem korlátos alulról

Halmazok korlátossága

Megoldás.

- a) H –nak $k \in \mathbb{R}$ nem alsó korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 < k$
- b) H –nak $K \in \mathbb{R}$ nem felső korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 > K$
- c) H nem korlátos alulról $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \exists x_0 \in H : x_0 < k$

Halmazok korlátossága

Megoldás.

- a) H – nak $k \in \mathbb{R}$ nem alsó korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 < k$
- b) H – nak $K \in \mathbb{R}$ nem felső korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 > K$
- c) H nem korlátos alulról $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \exists x_0 \in H : x_0 < k$
- d) H nem korlátos felülről

Halmazok korlátossága

Megoldás.

- a) H – nak $k \in \mathbb{R}$ nem alsó korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 < k$
- b) H – nak $K \in \mathbb{R}$ nem felső korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 > K$
- c) H nem korlátos alulról $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \exists x_0 \in H : x_0 < k$
- d) H nem korlátos felülről $\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists x_0 \in H : x_0 > K$

Halmazok korlátossága

Megoldás.

- a) H – nak $k \in \mathbb{R}$ nem alsó korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 < k$
- b) H – nak $K \in \mathbb{R}$ nem felső korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 > K$
- c) H nem korlátos alulról $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \exists x_0 \in H : x_0 < k$
- d) H nem korlátos felülről $\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists x_0 \in H : x_0 > K$
- e) H nem korlátos

Halmazok korlátossága

Megoldás.

- a) H – nak $k \in \mathbb{R}$ nem alsó korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 < k$
- b) H – nak $K \in \mathbb{R}$ nem felső korlátja $\Leftrightarrow \exists x_0 \in H : x_0 > K$
- c) H nem korlátos alulról $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \exists x_0 \in H : x_0 < k$
- d) H nem korlátos felülről $\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R} \exists x_0 \in H : x_0 > K$
- e) H nem korlátos $\Leftrightarrow H$ nem korlátos alulról **VAGY** nem korlátos felülről



Halmazok korlátossága

Megjegyzés

Felülről/alulról korlátos halmaznak végtelen sok felső/alsó korlátja van.

Tétel

Felülről korlátos halmaz felső korlátai között mindig van legkisebb és alulról korlátos halmaz alsó korlátai között mindig van legnagyobb.

Alsó- és felső határ (inf és sup)

Definíció

- *Felülről korlátos* $H \subseteq R$, $H \neq \emptyset$ halmaz felső korlátai között a legkisebbet a halmaz **szuprémumának** (**felső határának**) nevezzük. Jelölés: $\sup H$.

Alsó- és felső határ (inf és sup)

Definíció

- *Felülről korlátos* $H \subseteq R$, $H \neq \emptyset$ halmaz felső korlátai között a legkisebbet a halmaz **szuprémumának** (**felső határának**) nevezzük. Jelölés: $\sup H$.
- *Alulról korlátos* $H \subseteq R$, $H \neq \emptyset$ halmaz alsó korlátai között a legnagyobbat a halmaz **infimumának** (**alsó határának**) nevezzük. Jelölés: $\inf H$.

Alsó- és felső határ (inf és sup)

Definíció

- *Felülről korlátos* $H \subseteq R$, $H \neq \emptyset$ halmaz felső korlátai között a legkisebbet a halmaz **szuprémumának** (**felső határának**) nevezzük. Jelölés: $\sup H$.
- *Alulról korlátos* $H \subseteq R$, $H \neq \emptyset$ halmaz alsó korlátai között a legnagyobbat a halmaz **infimumának** (**alsó határának**) nevezzük. Jelölés: $\inf H$.
- Ha egy $H \subseteq R$, $H \neq \emptyset$ halmaz nem korlátos felülről, akkor azt mondjuk, hogy a szuprémuma $+\infty$. Jelölés: $\sup H = +\infty$.

Alsó- és felső határ (inf és sup)

Definíció

- *Felülről korlátos* $H \subseteq R$, $H \neq \emptyset$ halmaz felső korlátai között a legkisebbet a halmaz **szuprémumának** (**felső határának**) nevezzük. Jelölés: $\sup H$.
- *Alulról korlátos* $H \subseteq R$, $H \neq \emptyset$ halmaz alsó korlátai között a legnagyobbat a halmaz **infimumának** (**alsó határának**) nevezzük. Jelölés: $\inf H$.
- Ha egy $H \subseteq R$, $H \neq \emptyset$ halmaz nem korlátos felülről, akkor azt mondjuk, hogy a szuprémuma $+\infty$. Jelölés: $\sup H = +\infty$.
- Ha egy $H \subseteq R$, $H \neq \emptyset$ halmaz nem korlátos alulról, akkor azt mondjuk, hogy az infimuma $-\infty$. Jelölés: $\inf H = -\infty$.

$$\alpha = \inf H, \beta = \sup H$$

Feladat

*Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy $\alpha = \inf H$,
 $\beta = \sup H$.*

$$\alpha = \inf H, \beta = \sup H$$

Feladat

Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy $\alpha = \inf H$, $\beta = \sup H$.

Megoldás. $\alpha = \inf H \Leftrightarrow$

$$\alpha = \inf H, \beta = \sup H$$

Feladat

Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy $\alpha = \inf H$, $\beta = \sup H$.

Megoldás. $\alpha = \inf H \Leftrightarrow$

i) $\forall x \in H \ x \geq \alpha$

$$\alpha = \inf H, \beta = \sup H$$

Feladat

Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy $\alpha = \inf H$, $\beta = \sup H$.

Megoldás. $\alpha = \inf H \Leftrightarrow$

i) $\forall x \in H \ x \geq \alpha$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists x_0 \in H$ elem, melyre $x_0 < \alpha + \varepsilon$

$$\alpha = \inf H, \beta = \sup H$$

Feladat

Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy $\alpha = \inf H$, $\beta = \sup H$.

Megoldás. $\alpha = \inf H \Leftrightarrow$

i) $\forall x \in H \ x \geq \alpha$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists x_0 \in H$ elem, melyre $x_0 < \alpha + \varepsilon$

$\beta = \sup H \Leftrightarrow$

$$\alpha = \inf H, \beta = \sup H$$

Feladat

Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy $\alpha = \inf H$, $\beta = \sup H$.

Megoldás. $\alpha = \inf H \Leftrightarrow$

i) $\forall x \in H \ x \geq \alpha$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists x_0 \in H$ elem, melyre $x_0 < \alpha + \varepsilon$

$$\beta = \sup H \Leftrightarrow$$

i) $\forall x \in H \ x \leq \beta$

$$\alpha = \inf H, \beta = \sup H$$

Feladat

Fogalmazzuk meg pozitív állítás formájában, hogy $\alpha = \inf H$, $\beta = \sup H$.

Megoldás. $\alpha = \inf H \Leftrightarrow$

i) $\forall x \in H \ x \geq \alpha$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists x_0 \in H$ elem, melyre $x_0 < \alpha + \varepsilon$

$\beta = \sup H \Leftrightarrow$

i) $\forall x \in H \ x \leq \beta$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\exists x_0 \in H$ elem, melyre $x_0 > \beta - \varepsilon$



Szélsőérték és korlátosság kapcsolata

Feladat

Milyen kapcsolatot tud megfogalmazni és igazolni a halmazok szélsőértéke és korlátossága között?

Szélsőérték és korlátosság kapcsolata

Feladat

Milyen kapcsolatot tud megfogalmazni és igazolni a halmazok szélsőértéke és korlátossága között?

Megoldás. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$, $H \neq \emptyset$.

$$\exists M := \max H \Rightarrow \exists \sup H, \text{ és } \sup H = \max H = M$$

Szélsőérték és korlátosság kapcsolata

Feladat

Milyen kapcsolatot tud megfogalmazni és igazolni a halmazok szélsőértéke és korlátossága között?

Megoldás. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$, $H \neq \emptyset$.

$$\exists M := \max H \Rightarrow \exists \sup H, \text{ és } \sup H = \max H = M$$

Indoklás: M egy jó felső korlát és nem lehet nála kisebb felső korlát, mert $M \in H$.

Szélsőérték és korlátosság kapcsolata

Feladat

Milyen kapcsolatot tud megfogalmazni és igazolni a halmazok szélsőértéke és korlátossága között?

Megoldás. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$, $H \neq \emptyset$.

$$\exists M := \max H \Rightarrow \exists \sup H, \text{ és } \sup H = \max H = M$$

Indoklás: M egy jó felső korlát és nem lehet nála kisebb felső korlát, mert $M \in H$.

$$\exists m := \min H \Rightarrow \exists \inf H, \text{ és } \inf H = \min H = m$$

Szélsőérték és korlátosság kapcsolata

Feladat

Milyen kapcsolatot tud megfogalmazni és igazolni a halmazok szélsőértéke és korlátossága között?

Megoldás. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$, $H \neq \emptyset$.

$$\exists M := \max H \Rightarrow \exists \sup H, \text{ és } \sup H = \max H = M$$

Indoklás: M egy jó felső korlát és nem lehet nála kisebb felső korlát, mert $M \in H$.

$$\exists m := \min H \Rightarrow \exists \inf H, \text{ és } \inf H = \min H = m$$

Indoklás: m egy jó alsó korlát és nem lehet nála nagyobb alsó korlát, mert $m \in H$.



Gyakorlás

Feladat

Vizsgálja meg az alábbi számhalmazokat szélsőérték, és korlátosság szempontjából is. Adja meg az infimumot és a szuprémomot is!

- a) $H := [-1, 3]$
- b) $H := [-1, 3)$
- c) $H := [-1, 3) \cup \{4\}$
- d) $H := (-\infty, 0) \cup \{2\}$
- e) $H = \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$

Megoldás, $H := [-1, 3]$

a) $H := [-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\}$

Sejtés: $\min H = -1, \quad \max H = 3,$



$$\inf H = -1, \quad \sup H = 3.$$

Biz.: $\boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$

Megoldás, $H := [-1, 3]$

$$\text{a) } H := [-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 3,$$



$$\inf H = -1, \quad \sup H = 3.$$



$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

$$\text{i) } -1 \overset{?}{\in} H$$

Megoldás, $H := [-1, 3]$

$$\text{a) } H := [-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 3,$$



$$\inf H = -1, \quad \sup H = 3.$$



$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

$$\text{i) } -1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

Megoldás, $H := [-1, 3]$

a) $H := [-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\}$

Sejtés: $\min H = -1, \quad \max H = 3,$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ \inf H = -1, & & \sup H = 3. \end{array}$$

Biz.: $\boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$

i) $-1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$

ii) $\forall x \in H$ esetén $x \overset{?}{\geq} -1$

Megoldás, $H := [-1, 3]$

a) $H := [-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\}$

Sejtés: $\min H = -1, \quad \max H = 3,$



$\inf H = -1, \quad \sup H = 3.$



Biz.: $\boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$

i) $-1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$

ii) $\forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\geq} -1 \quad \checkmark$

Megoldás, $H := [-1, 3]$

a) $H := [-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\}$

Sejtés: $\min H = -1, \quad \max H = 3,$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ \inf H = -1, & & \sup H = 3. \end{array}$$

Biz.: $\boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$

i) $-1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$

ii) $\forall x \in H$ esetén $x \overset{?}{\geq} -1 \quad \checkmark$

$\boxed{\max H = 3} \Leftrightarrow$

Megoldás, $H := [-1, 3]$

$$\text{a) } H := [-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 3,$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ \inf H = -1, & & \sup H = 3. \end{array}$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

$$\text{i) } -1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

$$\text{ii) } \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\geq} -1 \quad \checkmark$$

$$\boxed{\max H = 3} \Leftrightarrow$$

$$\text{i) } 3 \overset{?}{\in} H$$

Megoldás, $H := [-1, 3]$

$$\text{a) } H := [-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 3,$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ \inf H = -1, & & \sup H = 3. \end{array}$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

$$\text{i) } -1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

$$\text{ii) } \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\geq} -1 \quad \checkmark$$

$$\boxed{\max H = 3} \Leftrightarrow$$

$$\text{i) } 3 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

Megoldás, $H := [-1, 3]$

$$\text{a) } H := [-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 3,$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ \inf H = -1, & & \sup H = 3. \end{array}$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

$$\text{i) } -1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

$$\text{ii) } \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\geq} -1 \quad \checkmark$$

$$\boxed{\max H = 3} \Leftrightarrow$$

$$\text{i) } 3 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

$$\text{ii) } \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\leq} 3$$

Megoldás, $H := [-1, 3]$

$$\text{a) } H := [-1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 3,$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ \inf H = -1, & & \sup H = 3. \end{array}$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

$$\text{i) } -1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

$$\text{ii) } \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\geq} -1 \quad \checkmark$$

$$\boxed{\max H = 3} \Leftrightarrow$$

$$\text{i) } 3 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

$$\text{ii) } \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\leq} 3 \quad \checkmark$$



Megoldás, $H := [-1, 3)$

$$\text{b) } H := [-1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = \bar{\exists},$$

$$\Downarrow$$

$$\inf H = -1, \quad \sup H = 3.$$

Biz.: $\boxed{\min H = -1}$, mint a)-ban.

Megoldás, $H := [-1, 3)$

$$\text{b) } H := [-1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = \bar{\exists},$$

$$\Downarrow$$

$$\inf H = -1, \quad \sup H = 3.$$

Biz.: $\boxed{\min H = -1}$, mint a)-ban.

$$\boxed{\sup H = 3} \Leftrightarrow$$

Megoldás, $H := [-1, 3)$

$$\text{b) } H := [-1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = \bar{\exists},$$

$$\Downarrow$$

$$\inf H = -1, \quad \sup H = 3.$$

Biz.: $\boxed{\min H = -1}$, mint a)-ban.

$$\boxed{\sup H = 3} \Leftrightarrow$$

$$\text{i) } \forall x \in H \quad x \overset{?}{\leq} 3$$

Megoldás, $H := [-1, 3)$

$$\text{b) } H := [-1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = \bar{\exists},$$

$$\Downarrow$$

$$\inf H = -1, \quad \sup H = 3.$$

Biz.: $\boxed{\min H = -1}$, mint a)-ban.

$$\boxed{\sup H = 3} \Leftrightarrow$$

$$\text{i) } \forall x \in H \overset{?}{x} \leq 3 \quad \checkmark, \text{ hiszen minden } H\text{-beli } x\text{-re } -1 \leq x < 3.$$

Megoldás, $H := [-1, 3)$

$$b) H := [-1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = \bar{\exists},$$



$$\inf H = -1, \quad \sup H = 3.$$

Biz.: $\boxed{\min H = -1}$, mint a)-ban.

$$\boxed{\sup H = 3} \Leftrightarrow$$

i) $\forall x \in H \overset{?}{x} \leq 3$ ✓, hiszen minden H -beli x -re $-1 \leq x < 3$.

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\overset{?}{\exists} x_0 \in H$ elem, melyre $x_0 > 3 - \varepsilon$

Megoldás, $H := [-1, 3)$

$$b) H := [-1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = \bar{\exists},$$

$$\Downarrow$$

$$\inf H = -1, \quad \sup H = 3.$$

Biz.: $\boxed{\min H = -1}$, mint a)-ban.

$$\boxed{\sup H = 3} \Leftrightarrow$$

i) $\forall x \in H \overset{?}{x} \leq 3$ ✓, hiszen minden H -beli x -re $-1 \leq x < 3$.

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\overset{?}{\exists} x_0 \in H$ elem, melyre $x_0 > 3 - \varepsilon$ ✓, hiszen

Megoldás, $H := [-1, 3)$

b) $H := [-1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\}$

Sejtés: $\min H = -1, \quad \max H = \bar{\exists},$



$\inf H = -1, \quad \sup H = 3.$

Biz.: $\boxed{\min H = -1}$, mint a)-ban.

$\boxed{\sup H = 3} \Leftrightarrow$

i) $\forall x \in H \overset{?}{x} \leq 3$ ✓, hiszen minden H -beli x -re $-1 \leq x < 3$.

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\overset{?}{\exists} x_0 \in H$ elem, melyre $x_0 > 3 - \varepsilon$ ✓, hiszen

- ha $\varepsilon \leq 4$, akkor $x_0 := \frac{3+3-\varepsilon}{2}$ -re teljesül, hogy

$$-1 \leq 3 - \varepsilon < x_0 < 3,$$

Megoldás, $H := [-1, 3)$

b) $H := [-1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\}$

Sejtés: $\min H = -1, \quad \max H = \bar{\exists},$



$\inf H = -1, \quad \sup H = 3.$

Biz.: $\boxed{\min H = -1}$, mint a)-ban.

$\boxed{\sup H = 3} \Leftrightarrow$

i) $\forall x \in H \overset{?}{x} \leq 3$ ✓, hiszen minden H -beli x -re $-1 \leq x < 3$.

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\overset{?}{\exists} x_0 \in H$ elem, melyre $x_0 > 3 - \varepsilon$ ✓, hiszen

- ha $\varepsilon \leq 4$, akkor $x_0 := \frac{3+3-\varepsilon}{2}$ -re teljesül, hogy

$$-1 \leq 3 - \varepsilon < x_0 < 3,$$

- ha $\varepsilon > 4$, akkor minden $x_0 \in H$ jó.

$\boxed{\max H = \bar{\exists}}$

Megoldás, $H := [-1, 3)$

b) $H := [-1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\}$

Sejtés: $\min H = -1, \quad \max H = \bar{\exists},$



$$\inf H = -1, \quad \sup H = 3.$$

Biz.: $\boxed{\min H = -1}$, mint a)-ban.

$$\boxed{\sup H = 3} \Leftrightarrow$$

i) $\forall x \in H \overset{?}{x} \leq 3$ ✓, hiszen minden H -beli x -re $-1 \leq x < 3$.

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\overset{?}{\exists} x_0 \in H$ elem, melyre $x_0 > 3 - \varepsilon$ ✓, hiszen

• ha $\varepsilon \leq 4$, akkor $x_0 := \frac{3+3-\varepsilon}{2}$ -re teljesül, hogy

$$-1 \leq 3 - \varepsilon < x_0 < 3,$$

• ha $\varepsilon > 4$, akkor minden $x_0 \in H$ jó.

 $\boxed{\max H = \bar{\exists}}$ Ha létezne $\max H$, akkor szükségképpen $\max H = \sup H = 3$, de $3 \notin H$, így nem létezik a maximum. $\square$

Megoldás, $H := [-1, 3) \cup \{4\}$

$$\text{c) } H := [-1, 3) \cup \{4\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3 \text{ vagy } x = 4\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 4,$$

$$\Downarrow$$
$$\Downarrow$$

$$\inf H = -1, \quad \sup H = 4.$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

Megoldás, $H := [-1, 3) \cup \{4\}$

$$c) H := [-1, 3) \cup \{4\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3 \text{ vagy } x = 4\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 4,$$



$$\inf H = -1, \quad \sup H = 4.$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

$$i) \quad -1 \overset{?}{\in} H$$

Megoldás, $H := [-1, 3) \cup \{4\}$

$$c) H := [-1, 3) \cup \{4\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3 \text{ vagy } x = 4\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 4,$$



$$\inf H = -1, \quad \sup H = 4.$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

$$i) \quad -1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

Megoldás, $H := [-1, 3) \cup \{4\}$

c) $H := [-1, 3) \cup \{4\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3 \text{ vagy } x = 4\}$

Sejtés: $\min H = -1, \quad \max H = 4,$



$$\inf H = -1, \quad \sup H = 4.$$

Biz.: $\boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$

i) $-1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$

ii) $\forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\geq} -1$

Megoldás, $H := [-1, 3) \cup \{4\}$

$$c) H := [-1, 3) \cup \{4\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3 \text{ vagy } x = 4\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 4,$$



$$\inf H = -1, \quad \sup H = 4.$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

$$i) -1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

$$ii) \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\geq} -1 \quad \checkmark, \text{ hiszen } 4 > -1 \text{ és így minden } x \in H\text{-ra teljesül, hogy } x \geq -1.$$

Megoldás, $H := [-1, 3) \cup \{4\}$

$$c) H := [-1, 3) \cup \{4\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3 \text{ vagy } x = 4\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 4,$$



$$\inf H = -1, \quad \sup H = 4.$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

$$i) -1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

$$ii) \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\geq} -1 \quad \checkmark, \text{ hiszen } 4 > -1 \text{ és így minden } x \in H\text{-ra teljesül, hogy } x \geq -1.$$

$$\boxed{\max H = 4} \Leftrightarrow$$

Megoldás, $H := [-1, 3) \cup \{4\}$

$$c) H := [-1, 3) \cup \{4\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3 \text{ vagy } x = 4\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 4,$$



$$\inf H = -1, \quad \sup H = 4.$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

$$i) -1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

$$ii) \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\geq} -1 \quad \checkmark, \text{ hiszen } 4 > -1 \text{ és így minden } x \in H\text{-ra teljesül, hogy } x \geq -1.$$

$$\boxed{\max H = 4} \Leftrightarrow$$

$$i) 4 \overset{?}{\in} H$$

Megoldás, $H := [-1, 3) \cup \{4\}$

$$c) H := [-1, 3) \cup \{4\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3 \text{ vagy } x = 4\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 4,$$



$$\inf H = -1, \quad \sup H = 4.$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

$$i) -1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

$$ii) \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\geq} -1 \quad \checkmark, \text{ hiszen } 4 > -1 \text{ és így minden } x \in H\text{-ra teljesül, hogy } x \geq -1.$$

$$\boxed{\max H = 4} \Leftrightarrow$$

$$i) 4 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

Megoldás, $H := [-1, 3) \cup \{4\}$

$$c) H := [-1, 3) \cup \{4\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3 \text{ vagy } x = 4\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 4,$$



$$\inf H = -1, \quad \sup H = 4.$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

$$i) -1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

$$ii) \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\geq} -1 \quad \checkmark, \text{ hiszen } 4 > -1 \text{ és így minden } x \in H\text{-ra teljesül, hogy } x \geq -1.$$

$$\boxed{\max H = 4} \Leftrightarrow$$

$$i) 4 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

$$ii) \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\leq} 4$$

Megoldás, $H := [-1, 3) \cup \{4\}$

$$c) H := [-1, 3) \cup \{4\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3 \text{ vagy } x = 4\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = -1, \quad \max H = 4,$$



$$\inf H = -1, \quad \sup H = 4.$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\min H = -1} \Leftrightarrow$$

$$i) -1 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

$$ii) \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\geq} -1 \quad \checkmark, \text{ hiszen } 4 > -1 \text{ és így minden } x \in H\text{-ra teljesül, hogy } x \geq -1.$$

$$\boxed{\max H = 4} \Leftrightarrow$$

$$i) 4 \overset{?}{\in} H \quad \checkmark$$

$$ii) \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\leq} 4 \quad \checkmark$$



Megoldás, $H := (-\infty, 0) \cup \{2\}$

$$\text{d) } H := (-\infty, 0) \cup 2 = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ vagy } x = 2\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = \bar{\exists}, \quad \max H = 2,$$

$$\uparrow$$
$$\downarrow$$

$$\inf H = -\infty, \quad \sup H = 2.$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\inf H = -\infty} \Leftrightarrow$$

Megoldás, $H := (-\infty, 0) \cup \{2\}$

$$\text{d) } H := (-\infty, 0) \cup \{2\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ vagy } x = 2\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = \bar{\exists}, \quad \max H = 2,$$

$$\uparrow$$

$$\downarrow$$

$$\inf H = -\infty, \quad \sup H = 2.$$

Biz.: $\boxed{\inf H = -\infty} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \text{ esetén } \overset{?}{\exists} x_0 \in H \text{ elem, melyre } x_0 < k$

Megoldás, $H := (-\infty, 0) \cup \{2\}$

$$d) H := (-\infty, 0) \cup \{2\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ vagy } x = 2\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = \bar{\exists}, \quad \max H = 2,$$

$$\uparrow$$

$$\downarrow$$

$$\inf H = -\infty, \quad \sup H = 2.$$

Biz.: $\boxed{\inf H = -\infty} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \text{ esetén } \overset{?}{\exists} x_0 \in H \text{ elem, melyre}$
 $x_0 < k$ ✓, hiszen

Megoldás, $H := (-\infty, 0) \cup \{2\}$

$$d) H := (-\infty, 0) \cup \{2\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ vagy } x = 2\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = \bar{\exists}, \quad \max H = 2,$$

$$\uparrow$$

$$\downarrow$$

$$\inf H = -\infty, \quad \sup H = 2.$$

Biz.: $\boxed{\inf H = -\infty} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \text{ esetén } \overset{?}{\exists} x_0 \in H \text{ elem, melyre } x_0 < k \quad \checkmark, \text{ hiszen}$

- ha $k \geq 0$, akkor minden $x_0 < 0$ jó.

Megoldás, $H := (-\infty, 0) \cup \{2\}$

$$d) H := (-\infty, 0) \cup 2 = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ vagy } x = 2\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = \bar{\exists}, \quad \max H = 2,$$

$$\uparrow$$

$$\downarrow$$

$$\inf H = -\infty, \quad \sup H = 2.$$

Biz.: $\boxed{\inf H = -\infty} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \text{ esetén } \overset{?}{\exists} x_0 \in H \text{ elem, melyre } x_0 < k \quad \checkmark, \text{ hiszen}$

- ha $k \geq 0$, akkor minden $x_0 < 0$ jó.
- ha $k < 0$, akkor $x_0 := 2k$ -ra teljesül, hogy

$$x_0 = 2k < k < 0.$$

Megoldás, $H := (-\infty, 0) \cup \{2\}$

$$d) H := (-\infty, 0) \cup 2 = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ vagy } x = 2\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = \bar{\exists}, \quad \max H = 2,$$

$$\uparrow$$

$$\downarrow$$

$$\inf H = -\infty, \quad \sup H = 2.$$

Biz.: $\boxed{\inf H = -\infty} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \text{ esetén } \overset{?}{\exists} x_0 \in H \text{ elem, melyre } x_0 < k \quad \checkmark, \text{ hiszen}$

- ha $k \geq 0$, akkor minden $x_0 < 0$ jó.
- ha $k < 0$, akkor $x_0 := 2k$ -ra teljesül, hogy

$$x_0 = 2k < k < 0.$$

$$\boxed{\max H = 2} \Leftrightarrow$$

Megoldás, $H := (-\infty, 0) \cup \{2\}$

$$d) H := (-\infty, 0) \cup 2 = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ vagy } x = 2\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = \bar{\exists}, \quad \max H = 2,$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \downarrow \\ \inf H = -\infty, & & \sup H = 2. \end{array}$$

Biz.: $\boxed{\inf H = -\infty} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \text{ esetén } \overset{?}{\exists} x_0 \in H \text{ elem, melyre } x_0 < k \quad \checkmark, \text{ hiszen}$

- ha $k \geq 0$, akkor minden $x_0 < 0$ jó.
- ha $k < 0$, akkor $x_0 := 2k$ -ra teljesül, hogy

$$x_0 = 2k < k < 0.$$

$$\boxed{\max H = 2} \Leftrightarrow$$

$$i) \overset{?}{2} \in H$$

Megoldás, $H := (-\infty, 0) \cup \{2\}$

$$d) H := (-\infty, 0) \cup 2 = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ vagy } x = 2\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = \bar{\exists}, \quad \max H = 2,$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \downarrow \\ \inf H = -\infty, & & \sup H = 2. \end{array}$$

Biz.: $\boxed{\inf H = -\infty} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \text{ esetén } \overset{?}{\exists} x_0 \in H \text{ elem, melyre } x_0 < k \quad \checkmark, \text{ hiszen}$

- ha $k \geq 0$, akkor minden $x_0 < 0$ jó.
- ha $k < 0$, akkor $x_0 := 2k$ -ra teljesül, hogy

$$x_0 = 2k < k < 0.$$

$$\boxed{\max H = 2} \Leftrightarrow$$

$$i) \overset{?}{2} \in H \quad \checkmark$$

Megoldás, $H := (-\infty, 0) \cup \{2\}$

$$d) H := (-\infty, 0) \cup 2 = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ vagy } x = 2\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = \bar{\exists}, \quad \max H = 2,$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \downarrow \\ \inf H = -\infty, & & \sup H = 2. \end{array}$$

Biz.: $\boxed{\inf H = -\infty} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \text{ esetén } \overset{?}{\exists} x_0 \in H \text{ elem, melyre } x_0 < k \quad \checkmark, \text{ hiszen}$

- ha $k \geq 0$, akkor minden $x_0 < 0$ jó.
- ha $k < 0$, akkor $x_0 := 2k$ -ra teljesül, hogy

$$x_0 = 2k < k < 0.$$

$$\boxed{\max H = 2} \Leftrightarrow$$

$$i) \overset{?}{2} \in H \quad \checkmark$$

$$ii) \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\leq} 2$$

Megoldás, $H := (-\infty, 0) \cup \{2\}$

$$d) H := (-\infty, 0) \cup 2 = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ vagy } x = 2\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = \bar{\exists}, \quad \max H = 2,$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \downarrow \\ \inf H = -\infty, & & \sup H = 2. \end{array}$$

Biz.: $\boxed{\inf H = -\infty} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \text{ esetén } \overset{?}{\exists} x_0 \in H \text{ elem, melyre } x_0 < k \quad \checkmark, \text{ hiszen}$

- ha $k \geq 0$, akkor minden $x_0 < 0$ jó.
- ha $k < 0$, akkor $x_0 := 2k$ -ra teljesül, hogy

$$x_0 = 2k < k < 0.$$

$$\boxed{\max H = 2} \Leftrightarrow$$

$$i) \overset{?}{2} \in H \quad \checkmark$$

$$ii) \forall x \in H \text{ esetén } x \overset{?}{\leq} 2 \quad \checkmark$$

Megoldás, $H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$

d) $H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$

Sejtés: $\min H = \bar{\exists}, \quad \max H = \bar{\exists},$

$\uparrow$

$$\inf H = \frac{1}{2}, \quad \sup H = +\infty.$$

Biz.: $\boxed{\inf H = \frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

Megoldás, $H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$

$$d) H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = \bar{\exists}, \quad \max H = \bar{\exists},$$

$$\uparrow$$

$$\inf H = \frac{1}{2}, \quad \sup H = +\infty.$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\inf H = \frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$i) \forall h \in H \overset{?}{h} \geq \frac{1}{2}$$

Megoldás, $H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$

$$d) H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = \exists, \quad \max H = \exists,$$

$$\uparrow$$

$$\inf H = \frac{1}{2}, \quad \sup H = +\infty.$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\inf H = \frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

i) $\forall h \in H \overset{?}{h} \geq \frac{1}{2}$ ✓, hiszen minden H -beli elem $h = \frac{x}{y}$ alakú,
ahol $0 < x < 1$ és $0 < y < 2x$, így

$$h = \frac{x}{y} > \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Megoldás, $H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$

$$d) H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = \exists, \quad \max H = \exists,$$

$$\uparrow$$

$$\inf H = \frac{1}{2}, \quad \sup H = +\infty.$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\inf H = \frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

i) $\forall h \in H \overset{?}{h} \geq \frac{1}{2}$ ✓, hiszen minden H -beli elem $h = \frac{x}{y}$ alakú,
ahol $0 < x < 1$ és $0 < y < 2x$, így

$$h = \frac{x}{y} > \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\overset{?}{\exists} h_0 \in H$ elem, melyre $h_0 < \frac{1}{2} + \varepsilon$,

Megoldás, $H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$

$$d) H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$$

$$\text{Sejtés: } \min H = \exists, \quad \max H = \exists,$$

$$\uparrow$$

$$\inf H = \frac{1}{2}, \quad \sup H = +\infty.$$

$$\text{Biz.: } \boxed{\inf H = \frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

- i) $\forall h \in H \overset{?}{h} \geq \frac{1}{2}$ ✓, hiszen minden H -beli elem $h = \frac{x}{y}$ alakú, ahol $0 < x < 1$ és $0 < y < 2x$, így

$$h = \frac{x}{y} > \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

- ii) $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\overset{?}{\exists} h_0 \in H$ elem, melyre $h_0 < \frac{1}{2} + \varepsilon$, azaz keresünk olyan $x_0 \in (0,1)$, $y_0 \in (0,2x_0)$ számokat, melyre $\frac{x_0}{y_0} < \frac{1}{2} + \varepsilon \dots$

$$\text{Megoldás, } H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$$

Keresünk olyan $x_0 \in (0,1)$, $y_0 \in (0,2x_0)$ számokat, melyre

$$\frac{x_0}{y_0} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\text{Megoldás, } H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$$

Keresünk olyan $x_0 \in (0,1)$, $y_0 \in (0,2x_0)$ számokat, melyre

$$\frac{x_0}{y_0} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Legyen $x_0 := \frac{1}{4}$ (Most akármelyik számot vehettem volna a $(0,1)$ intervallumon!), és keresünk olyan $y_0 \in (0,2x_0) = (0, \frac{1}{2})$ számot, melyre

$$\frac{1}{4y_0} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\text{Megoldás, } H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$$

Keresünk olyan $x_0 \in (0,1)$, $y_0 \in (0,2x_0)$ számokat, melyre

$$\frac{x_0}{y_0} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Legyen $x_0 := \frac{1}{4}$ (Most akármelyik számot vehettem volna a $(0,1)$ intervallumon!), és keresünk olyan $y_0 \in (0,2x_0) = (0, \frac{1}{2})$ számot, melyre

$$\frac{1}{4y_0} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Ezt az egyenlőtlenséget y_0 -ra rendezve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2 + 4\varepsilon} < y_0. \quad (1)$$

$$\text{Megoldás, } H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$$

Keresünk olyan $x_0 \in (0,1)$, $y_0 \in (0,2x_0)$ számokat, melyre

$$\frac{x_0}{y_0} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Legyen $x_0 := \frac{1}{4}$ (Most akármelyik számot vehettem volna a $(0,1)$ intervallumon!), és keresünk olyan $y_0 \in (0,2x_0) = (0, \frac{1}{2})$ számot, melyre

$$\frac{1}{4y_0} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Ezt az egyenlőtlenséget y_0 -ra rendezve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2 + 4\varepsilon} < y_0. \quad (1)$$

Mivel $\varepsilon > 0$, ezért $\frac{1}{2+4\varepsilon} < \frac{1}{2}$, így

$$y_0 := \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2+4\varepsilon}}{2}$$

számra teljesül, hogy $y_0 \in (0, \frac{1}{2})$, és (1). Ezzel beláttuk, hogy ii) is teljesül. ✓

Megoldás, $H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$

$$\min H = \overline{\exists}$$

Megoldás, $H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$

$\boxed{\min H = \exists}$ Ha létezne $\min H$, akkor szükségképpen
 $\min H = \inf H = \frac{1}{2}$, de $\frac{1}{2} \notin H$, mert az csak $y = 2x$ esetén
 teljesülne, így nem létezik a minimum.

Megoldás, $H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$

$\boxed{\min H = \exists}$ Ha létezne $\min H$, akkor szükségképpen
 $\min H = \inf H = \frac{1}{2}$, de $\frac{1}{2} \notin H$, mert az csak $y = 2x$ esetén
teljesülne, így nem létezik a minimum.

$\boxed{\sup H = +\infty} \Leftrightarrow$

Megoldás, $H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$

$\boxed{\min H = \exists}$ Ha létezne $\min H$, akkor szükségképpen
 $\min H = \inf H = \frac{1}{2}$, de $\frac{1}{2} \notin H$, mert az csak $y = 2x$ esetén
 teljesülne, így nem létezik a minimum.

$\boxed{\sup H = +\infty} \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}$ esetén $\overset{?}{\exists} h_0 \in H$ elem, melyre $h_0 > K$

Megoldás, $H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$

$\boxed{\min H = \exists}$ Ha létezne $\min H$, akkor szükségképpen
 $\min H = \inf H = \frac{1}{2}$, de $\frac{1}{2} \notin H$, mert az csak $y = 2x$ esetén
 teljesülne, így nem létezik a minimum.

$\boxed{\sup H = +\infty}$ $\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}$ esetén $\overset{?}{\exists} h_0 \in H$ elem, melyre $h_0 > K$
 ✓, hiszen

Megoldás, $H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$

$\boxed{\min H = \exists}$ Ha létezne $\min H$, akkor szükségképpen
 $\min H = \inf H = \frac{1}{2}$, de $\frac{1}{2} \notin H$, mert az csak $y = 2x$ esetén
teljesülne, így nem létezik a minimum.

$\boxed{\sup H = +\infty} \Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}$ esetén $\overset{?}{\exists} h_0 \in H$ elem, melyre $h_0 > K$
✓, hiszen

- ha $K \leq \frac{1}{2}$, akkor minden $h_0 \in H$ jó,

$$\text{Megoldás, } H := \left\{ \frac{x}{y} : 0 < x < 1; 0 < y < 2x \right\}$$

$\boxed{\min H = \exists}$ Ha létezne $\min H$, akkor szükségképpen $\min H = \inf H = \frac{1}{2}$, de $\frac{1}{2} \notin H$, mert az csak $y = 2x$ esetén teljesülne, így nem létezik a minimum.

$\boxed{\sup H = +\infty}$ $\Leftrightarrow \forall K \in \mathbb{R}$ esetén $\overset{?}{\exists} h_0 \in H$ elem, melyre $h_0 > K$
✓, hiszen

- ha $K \leq \frac{1}{2}$, akkor minden $h_0 \in H$ jó,
- ha $K > \frac{1}{2}$, akkor például $x_0 := \frac{1}{2}$ -re keresünk olyan $y_0 \in (0,1)$ számot, melyre

$$h_0 := \frac{x_0}{y_0} = \frac{1}{2y_0} > K.$$

Átrendezéssel kapjuk, hogy $\frac{1}{2K} > y_0$ -nak kell teljesülnie.
Ilyen $y_0 \in (0,1)$ létezik, például az $y_0 := \frac{1}{4K}$ szám jó ($\frac{1}{2K} < 1$).